RELME
Reunión
Latinoamericana
de Matemática
Educativa

Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa

México, 1997

Clame
Comité Latinoamericano
de Matemática Educativa

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Presidente
Ricardo Cantoral
Tesorera
Julia Rodríguez
Directores Ejecutivos
Luis Campistrous
Cuba
Patricia fogliatti
Argentina
Gloria García
Colombia
Teresita Peralta
Costa Rica
Guadalupe Tejada de Castillo
Panamá

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Comité Nacional Organizador

Ricardo Cantoral
Coordinador General
Roberto García
Comisión Nacional de Organización
Rosa María Farfán
Comisión Académica
Carlos Rondero
Comisión de Difusión
José Carlos Cortés
Comisión de Apoyo Logístico
Evelia Reséndiz
Comisión de Programas
Francisco Alarcón
Comisión de Autogestión
Enrique Oaxaca
Comisión de Diseño Editorial
Martha Maldonado
Comisión de Información y Enlace
Marina Peral
Comisión Administrativa y Financiera
Marcela Valdés
Comisión de Relaciones Públicas
Miguel Solís
Comisión de Promoción Técnica Comercial
Francisco Cordero
Comisión de Becas
Liliana Suárez
Comisión de Recepción

Relme
Reunión
Latinoamericana
de Matemática
Educativa

Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa

Clame
Comité Latinoamericano
de Matemática Educativa

Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa-*Primera Edición mayo de 1998*
Editora: ***Rosa María Farfán***

Diseño y cuidado de la edición: Javier Lezama y Antonio Arellano
Diseño de portada: Enrique Oaxaca

ISBN 970-625-175-8

Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V.
Nebraska 199. Col. Nápoles C. P. 03810 México, D. F.
Teléfono: 523 09 94. Fax: 543 11 73
e-mail: geimex@mpsnet.com.mx.
http://vitalsoft.org.org.mx/gei
Reg. CANIEM 1382

Impreso en Colombia / Printed in Colombia

A la memoria de Papini

A quien agradecemos profundamente
el habernos ofrecido uno de sus
últimos alientos en Relme-11

PRESENTACIÓN

La *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa Relme-11* es el resultado de once años de esfuerzos que hoy la constituye como el foro mas importante de Latinoamérica. Todos los asistentes, en exhaustivas sesiones intercambian sus experiencias, comunican sus ideas y presentan sus resultados rigurosamente, con la intención deliberada de consolidar nuestra disciplina, la **Matemática Educativa,** y ello con el ánimo de favorecer el aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles de los sistemas educativos de nuestro continente. En esta publicación se agrupan las ***Actas de Relme-11***

Relme-11 inició con diversos proyectos académicos convocando a colegas de veinte diversos países que desarrollaron 404 diferentes actividades académicas. Lo que significó el triple en número de nuestro récord anterior; pero sobretodo se integraron nuevos colegas que enriquecieron el debate posibilitando el perfeccionamiento de nuestros acercamientos a la investigación y nuestras propuestas de incidencia en el aula. Ello ha sido posible gracias a nuestra nueva estructura organizativa: el ***Comité Latinoamericano de Matemática Educativa***

HISTORIA Y OBJETIVOS DE CLAME

El Comité Latinoamericano de Matemática Educativa se constituyó en la X Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa que se celebró en Puerto Rico en agosto de 1996. En dicha reunión se acordó también, modificar el nombre a Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa y continuar la numeración de tal manera que hoy asistimos a la Undécima Reunión (Relme-11).

La Reunión Latinoamérica de Matemática Educativa es el fruto de la evolución de las diez reuniones Centroamericanas y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, que se celebraron anualmente desde 1987. Estas primeras reuniones posibilitaron el intercambio entre colegas que, aunque cercanos geográficamente, no contaban con espacios propios que favorecieran el contraste periódico de experiencias en castellano. En este sentido la *Relme* retoma, amplía y profundiza la intención de orientar sus acciones en beneficio de los sistemas escolares de nuestra América Latina.

Las modificaciones orgánicas atienden tanto al aumento en la participación de colegas de los distintos países latinoamericanos; como a la creciente profesionalización de la comunidad que año con año participa activamente en nuestras reuniones. Por ello y a fin de atender organizadamente las demandas de la comunidad, se forma el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, junto con proyectos académicos que perfilan y consolidan el proceso de fortalecimiento de la disciplina en América Latina. Bajo la premisa de conservar la pluralidad de los acercamientos existentes y el respeto a las tradiciones educativas propias de cada uno de los países miembros. Los proyectos que de inicio impulsa el Clame son los siguientes:

- La creación de la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (***Relime***). Órgano de publicación oficial de Clame con tres números al año. El objetivo de esta iniciativa es el de promover y fomentar la escritura de artículos de investigación de alta calidad en la región, sin la restricción de espacio y tiempo que la Reunión establece.
- La instauración del ***Premio "Simón Bolívar"*** a la mejor tesis de posgrado en Matemática Educativa" cuyo objetivo es el de estimular a los recién graduados y fomentar entre los jóvenes el estudio de la disciplina. Los ganadores del Premio se dan a conocer en la Relme, junto con los miembros del Jurado en sesión solemne "Cátedra Simón Bolívar" y ofrecen una conferencia de su trabajo de investigación.
- Otro de los proyectos de Clame es la generación de un "Directorio Latinoamericano de Especialistas en Matemática Educativa" que al contener los datos de nuestros colegas y sus áreas de especialización, nos permita establecer una red eficiente de comunicación entre pares.
- Una iniciativa adicional de Clame se dirige hacia la formación de un programa editorial necesario en nuestros países con varias series: libros especializados, libros de texto y materiales de docencia, entre otros. Con la publicación de las tesis ganadoras del Premio "Simón Bolívar", iniciamos la serie de "Investigaciones en Matemática Educativa", algunos colegas de los grupos de trabajo de Relme han presentado propuestas para la elaboración de diversos "Estados del Arte..." que será otra serie. Hacemos una cordial invitación a presentar propuestas para las diversas series que conformarán nuestra biblioteca de Matemática Educativa en Latinoamérica.

ORGANIZACIÓN DE LAS ACTAS

Presentamos en esta publicación el extenso de las diversas participaciones en Relme-11 que fueron recibidas por el Comité, atendiendo a la clasificación propuesta en nuestra página electrónica.

El proceso de revisión de las ponencias siguió en esta ocasión una mecánica nueva debido no sólo al notable incremento en la participación, sino también a la diversidad temática que caracterizó nuestra undécima Reunión. En términos generales, seguimos un procedimiento por etapas. En la primera, se realizó una revisión básica de coherencia, tanto desde el punto de vista de la claridad de la comunicación como de la pertinencia teórica según las perspectivas de Relme. En un segundo nivel, un conjunto de especialistas altamente reconocidos en el campo de la Matemática Educativa, analizó cada una de las propuestas remitidas a la Coordinación Académica de Relme-11, emitiendo en consecuencia un dictamen definitivo que tomaba en cuenta la primera y revisión general, pero que soportaba sus dictámenes con base en la calidad del trabajo en comparación de los niveles internacionales de exigencia que suelen pedirse para eventos académicos de esta índole.

Para la primera etapa, el conjunto de revisores estuvo conformado por un nutrido grupo de colegas que invariablemente han mostrado su compromiso con la Reunión. Para la segunda de las etapas descritas, contamos con la decidida colaboración del Comité Científico y del Comité de Redacción de la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Las grandes líneas en las que hemos clasificado las ponencias son:

- Pensamiento matemático avanzado
- Pensamiento numérico
- Pensamiento algebraico
- Pensamiento geométrico
- Pensamiento de Probabilidad y Estadística
- Uso de Tecnología
- Incorporación de distintas perspectivas
- Formación de profesores
- Desarrollo de curriculum
- Teoría y metodología
- Documentos de los Grupos de trabajo y discusión

En cada capítulo, salvo el último, se ofrece una subdivisión atendiendo al nivel escolar (niveles: básico, medio superior y superior) que refiere la investigación en cuestión.

AGRADECIMIENTOS

El principal reconocimiento va dirigido, naturalmente, a todos los colegas que dan vida a *Relme* haciendo posible nuestro encuentro: a todos los participantes y autores de estas actas. Empero el Comité Organizador y la Coordinación Académica de Relme-11 desea expresar su especial reconocimiento a todos los árbitros y colaboradores editoriales que aportaron su conocimiento, tiempo,

esfuerzo y sobretodo entusiasmo en beneficio de la calidad de esta publicación. Por supuesto a los miembros directivos y representantes de Clame en los diferentes países por su colaboración.

Agradecemos a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo su hospitalidad al albergarnos en el histórico y majestuoso Colegio de San Nicolás de Hidalgo y a todas las instituciones y empresas que nos apoyaron con recursos materiales y humanos.

Rosa María Farfán
Coordinadora Académica de Relme-11

CIUDAD DE MÉXICO
PRIMAVERA DE 1998

CONTENIDO:

PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO

La técnica de la modelación como un recurso para aprender a resolver problemas aritméticos en la escuela primaria

Ma. Guadalupe Cabañas Sánchez
Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Resumen: En este artículo se dan a conocer los resultados de un estudio teórico acerca de la solución de problemas aritméticos realizado con estudiantes de la escuela primaria mexicana. Se revisó la bibliografía oficial dirigida a los profesores de primaria, libros de texto, mediante cuestionarios se exploró el estado de desarrollo de la capacidad para resolver problemas aritméticos en alumnos de tercero, cuarto, quinto y sexto grado de la escuela y así poder caracterizar los errores más frecuentes ante problemas simples y compuestos. Se estructuró una propuesta para la solución de problemas aritméticos mediante el uso de distintos tipos de modelos a través de la Técnica de la Modelación, que puede ser introducida de manera alternativa desde primer grado en la escuela primaria.

Introducción:

Uno de los temas de mayor interés en la actualidad es el trabajo con la solución de problemas, pues se presupone que la enseñanza de la matemática a través de problemas puede favorecer el desarrollo del pensamiento y por tanto, mejorar el aprendizaje en los estudiantes. En los últimos años, varios países han incorporado la solución de problemas en la enseñanza de la matemática como un componente importante del conocimiento matemático. En nuestro país, los actuales planes y programas de estudio del Sistema Educativo Básico (primaria), resaltan la importancia de que "el alumno utilice las matemáticas como un instrumento que le ayude a reconocer, plantear y resolver problemas en diversos contextos". Esta investigación, está encaminada precisamente al trabajo con problemas en la enseñanza de la matemática de la escuela primaria. El propósito fundamental, es hacer una propuesta acerca de cómo introducir una técnica para aprender a resolver problemas aritméticos en la escuela primaria a través de un programa alternativo y una serie de problemas apropiados para trabajar con dicha técnica. Esta técnica es la *Modelación*, que se apoya en la utilización de cuatro tipos de modelos a saber: *lineales*, *tabulares*, *ramificados* y *conjuntistas*. Puede ser introducida desde primer grado de primaria, con acciones apropiadas a los niños de edades pequeñas desde que se introducen los significados de las operaciones aritméticas mediante gráficos o esquemas que faciliten su comprensión.

Aspectos metodológicos de la investigación:

En la investigación se utilizaron principalmente métodos teóricos y empíricos. Los métodos teóricos se utilizaron en la revisión de la literatura relacionada con el tema, en el análisis, la selección y solución de cientos de problemas aritméticos para sistematizar sus estructuras y procedimientos de solución. Se revisaron los planes y programas de estudio de matemáticas, así como de los libros para el maestro y del alumno, con el objeto de: verificar si en los planes y programas de estudio y en los libros para el maestro hablan acerca de la modelación; verificar si en los libros de texto utilizan modelos y qué tipo de modelos; función del modelo en el libro de texto; y si el modelo está dado o hay que construirlo. Los métodos empíricos se utilizaron en la exploración del estado de la capacidad de resolver problemas en los estudiantes y para diagnosticar el estado de solución de problemas en condiciones "óptimas". Para ello se seleccionó una muestra de 213 alumnos de tercero, cuarto, quinto y sexto grado, considerados como los de más alto rendimiento, para obtener una especie de "máximo" en cuanto al desarrollo de esta habilidad. Después, se aplicó un segundo cuestionario a los alumnos de sexto grado únicamente, con la finalidad de constatar la técnica del tanteo. Los dos cuestionario fueron aplicados con el objetivo de: valorar la habilidad de los alumnos para resolver problemas aritméticos simples y compuestos y comprobar si usan modelos como recurso para comprender o encontrar vías de solución.

Resultados del diagnóstico:

En la muestra seleccionada se aplicaron un total de 233 problemas, el 17.2% pertenecía a los llamados problemas simples, que se resuelven a través de una sola operación y el resto a los llamados problemas compuestos que necesitan para su solución la realización previa de problemas auxiliares y la interpretación de uno o varios significados de las operaciones. En el primer caso se obtuvo sólo un 47.5% de aciertos, mientras que en el segundo un 34.7% (ver tabla 1). Los errores más comunes cometidos por los alumnos, en orden descendente fueron: No interpretar el problema, no interpretar las operaciones, omitir operaciones intermedias, no identificar los datos expresados con palabras, no interpretar parte alícuota entre otras.

Tabla 1

RESULTADOS GENERALES						
	PROBLEMAS SIMPLES		PROBLEMAS COMPUESTOS		TOTAL	
GRADO	ACIERTOS	ERRORES	ACIERTOS	ERRORES	ACIERTOS	ERRORES
3o.	0	15	22	21	22	36
4o.	19	6	4	22	23	28
5°.	0	0	12	42	12	42
6°.1	0	0	26	23	26	23
6°.2	0	0	3	18	3	18
TOTAL	19	21	67	126	86	147

Resultados generales:

En sentido general, como se puede apreciar en la tabla 1, no son buenos los resultados obtenidos, esto confirmó la idea de que existen dificultades en los alumnos ante la solución de problemas. Esto aumentó el sentido de la investigación, encaminada precisamente a proporcionar técnicas útiles en la comprensión y búsqueda de la idea de la solución de problemas aritméticos, que después pueden ser utilizadas en cualquier tipo de problemas como es el caso de la modelación. El resultado de la investigación se puede resumir de la siguiente manera: un programa alternativo para introducir la Técnica de la modelación elaborado en término de acciones dirigidas a los alumnos y un sistema de problemas como apoyo para el desarrollo de la capacidad de resolver problemas. El procedimiento generalizado que se propone en este trabajo comprende las siguientes fases que responden a preguntas establecidas y sistematiza las técnicas a emplear en cada caso:

¿Qué Dice?	* Leo	(Lectura global)
	* Releo	Lectura analítica Modelación
¿ Puedo decirlo de otra forma?	* Reformulo	Lectura analítica y reformulación
¿ Cómo lo puedo resolver ?	* Busco la vía de solución	Lectura analítica y reformulación Modelación Determinación de problemas auxiliares Tanteo inteligente Analogía
	* Resuelvo	
¿ Es correcto lo que hice? ¿ Existe otra vía?.¿Para qué otra cosa me sirve?	* Hago consideraciones (incluye la comprobación, análisis de la solución y análisis del procedimiento	Técnicas de la comprobación

Este procedimiento se fundamenta en las etapas de la actividad sistematizadas por Leontiev: orientación, ejecución y control teniendo en cuenta las implicaciones que ella tiene en la solución de problemas. Para ello se parte de las fases conocidas para la solución de problemas: comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva, y de los procedimientos heurísticos que desde Polya ocupan un lugar importante en esta teoría. La técnica de la modelación, como se puede observar, está asociada a las acciones: *Releo* y *busco la vía de solución,* y esta propuesta estará considerada dentro de esos dos momentos del procedimiento generalizado.

La formación de la habilidad para construir esquemas:

Para la formación de la habilidad de construir esquemas, pueden encontrarse una serie de acciones que, en forma resumida y consideradas dentro de un procedimiento generalizado para la solución de problemas, el alumno debe aprender. Dentro de ellas están las siguientes:

Analizo qué tipo de modelo utilizar. (¿Qué tipo?)

Decido por donde voy a comenzar a representar la información. (¿Cómo represento la información?)

Hago el esquema

Controlo si se corresponde con la situación. (¿Se ajusta el esquema a la situación?)

Lo analizo para ver si me ayuda a comprender mejor el problema o a encontrar la vía de solución. (¿Qué puedo inferir de él?).

Estas acciones, en sí mismas, constituyen también un procedimiento generalizado para la técnica de la modelación intuitiva. Este procedimiento está también expresado en término de acciones para el alumno, pues para él es que están dirigidas, y se dan dos formas de expresarlas: aseverativa e interrogativa, para que sea el propio alumno quien escoja la mejor para él.

Conclusiones

En los Planes y Programas de estudio de la escuela primaria, no se recomienda la modelación como estrategia o técnica para utilizar en la solución de problemas. En los libros de texto del alumno, aparecen modelos de diferentes tipos: pictográfico, lineal, tabular, ramificado y analógico entre otros.

La función básica de los modelos en los textos es: para que el alumno comprenda el significado y simbología de los números naturales, para introducir y repasar los conceptos de suma, resta, multiplicación y división en situaciones de reparto, agrupación y conteo principalmente, para introducir el significado de fracción, organizar y registrar información, representar los datos de problemas. Los modelos ya se le dan construidos a los alumnos, por lo que nunca se les enseña a construirlos y menos aún a cómo utilizarlos como herramienta de apoyo en la solución de problemas.

Es posible, aprovechando lo que se hace en cada grado de la escuela primaria, ampliar el uso de los modelos e introducir la técnica de la modelación como procedimiento que facilite la comprensión del texto de un problema y la búsqueda de la idea de solución. Las acciones que se proponen para la Técnica de la modelación pueden ser introducidas gradualmente, es decir, con acciones apropiadas a los niños de edades pequeñas, hasta lograr que las interioricen. Esto puede lograrse completamente a partir de cuarto grado y pueden ser utilizadas las etapas de la Teoría de Galperin para la estructura didáctica de su tratamiento.

Es necesario complementar los problemas que aparecen en los textos, de modo que el alumno se enfrente a situaciones para las que sea conveniente utilizar la modelación como técnica.

Recomendaciones

Dada la naturaleza teórica del trabajo, sería recomendable su puesta en práctica, en condiciones experimentales, para lo cual sería necesario primeramente impartir seminarios a los profesores del nivel básico. Considerar en la formación de profesores de primaria, técnicas o estrategias de solución de problemas, entre las que puede encontrarse la propuesta en este trabajo.

Referencias Bibliográficas

- **Campistrous, P.; Rizo C., et al**. (1993) *Aprende a resolver problemas aritméticos.* Proyecto TEDI, Cuba, Edit. Pueblo y Educación, Instituto Central de Ciencias Pedagógicas - Ministerio de Educación.
- **Instituto Central de Ciencias Pedagógicas**-Ministerio de Educación. (1993). *ARPA, Material para los alumnos, Proyecto TEDI*, Cuba.
- **Labarrere, A**. (1980). *"Cómo el maestro de primaria puede iniciar a sus alumnos en la construcción de esquemas para resolver problemas matemáticos", Cuba,* Revista *La Educación por el Mundo*.

El desarrollo de ideas variacionales y la derivada en situacion escolar

Crisólogo Dolores Flores
Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV del IPN/UAG/CONACYT

Resumen:
Este artículo se refiere a una investigación en la enseñanza del Cálculo Diferencial en el Bachillerato, en particular adopta como problema de investigación la escasa comprensión de las ideas variacionales subyacentes en el concepto de derivada. La investigación parte del supuesto de que el desarrollo de ideas variacionales puede favorecer la comprensión de este concepto. La investigación realizó en el aula escolar, para ello diseñó una *experiencia pedagógica* con estudiantes del bachillerato, la experiencia tuvo como foco de atención fue el concepto de derivada y, su introducción en el aula fue guiada por el enfoque variacional.

1.-Aspectos básicos de la investigación:

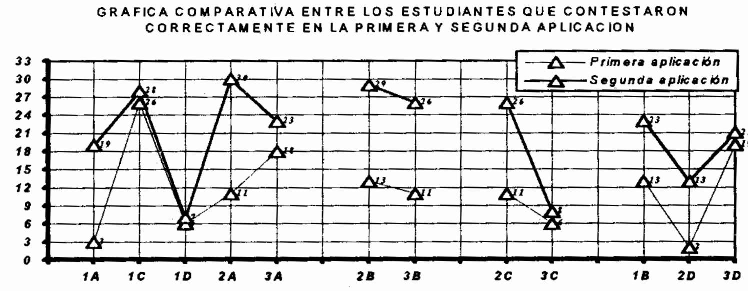
La investigación aborda el problema la escasa comprensión de las ideas y conceptos variacionales que subyacen en el concepto de derivada. Por tanto parte de la hipótesis de que el desarrollo de ideas variacionales puede favorecer una mejor comprensión de este concepto, pues su naturaleza es variacional y en la rapidez de la variación se encuentra el germen que le dio origen. Uno de los elementos teóricos utilizados en la investigación es la concepción de enfoque variacional, este enfoque se caracteriza en poner a la variación física como la fuente principal de las ideas del cálculo, de manera que la derivada no es estudiada como un concepto matemático *per se*, sino por la necesidad de resolver problemas de rapidez instantánea de la variación. Por otro lado en cuanto a la comprensión de los conceptos, se adoptan algunos elementos teóricos de los trabajos de N. Talízina (1993), al respecto señala que en la obtención íntegra de un concepto lo importante no es que el alumno recuerde de memoria los rasgos esenciales, sino que logre apoyarse realmente en estos rasgos para ejecutar la acción. La capacidad de *poder hacer* a partir del *saber* las definiciones es fundamental en la comprensión de los conceptos y se manifiestan por medio de las habilidades matemáticas.

Los elementos metodológicos básicos utilizados en esta investigación fueron tomados de las Ciencias Pedagógicas. Por eso fue realizada en el aula escolar. Para ello se diseñó una *experiencia pedagógica* con 32 estudiantes del bachillerato, la experiencia tuvo como foco de atención fue el concepto de derivada. La experiencia se estructuró en tres fases. En la primera fase se crearon las condiciones previas, en ella se incluye el estudio de las variables y funciones. La segunda fase está dedicada a la formación del concepto de derivada, se parte del problema de la determinación de velocidades medias hasta arribar a la imposibilidad de obtener la velocidad instantánea utilizando el recurso de la velocidad media, esta insuficiencia motiva una introducción intuitiva de límite a partir los *infinitamente pequeños*. La tercera fase está dedicada a la ampliación y profundización de la idea de razón de cambio instantánea en la resolución de problemas que no necesariamente relacionados con la variación física. La experiencia pedagógica fue realizada con el mismo grupo, de modo que su validación fue esencialmente interna. Al inicio, mediante un cuestionario se exploró el estado de algunas ideas variacionales en los estudiantes participantes, al final se aplicó el mismo cuestionario para analizar los cambios producidos. Algunos aspectos indicativos de la comprensión del concepto en cuestión son explorados por medio de cuestionarios aplicados a lo largo de la experiencia. Los resultados de ambas exploraciones son comparados y analizadas, a fin de obtener información sobre la relación entre el desarrollo de ideas variacionales y la comprensión del concepto de derivada. El análisis de los resultados es más de carácter cualitativo que cuantitativo, en él se analiza el desarrollo de las ideas de rapidez de la variación, variación positiva, variación negativa y no variación en relación con algunos indicadores de la comprensión del concepto de derivada, de estos últimos se analizan el poder calcular velocidades instantáneas, poder resolver problemas sobre rapidez instantánea.

2.- Resultados de la investigación:

A fin de explorar el desarrollo de las ideas afines sobre la variación, las preguntas del cuestionario inicial (ver anexo) fueron asociadas en dos grupos. En el primer grupo se conjuntaron las la relativas a la rapidez de la variación y en el segundo grupo se incluyen variación positiva, negativa y no variación.

Respecto de la idea de *rapidez* (ver Gráfica 1). En la *pregunta 2.A,* se pide el intervalo de mayor rapidez, aunque la respuesta es evidente, sólo 11 se percatan de ello en la primera aplicación y prácticamente todos dan respuestas correctas en la segunda. En la *pregunta 1.A* se pide el intervalo de mayor variación de la temperatura, casi todos los estudiantes en la primera aplicación señalaron el intervalo de 10 a 20, quizá considerando como ideas equivalentes a la *mayor variación* con el *mayor valor* de la función, no obstante en la segunda aplicación 19 estudiantes la contestaron correctamente y sólo 3 en la primera. En la *pregunta 1.C* la mayoría de los estudiantes contestó correctamente, 26 estudiantes se deciden por el calentamiento en la primera aplicación y 28 en la segunda, aunque en los argumentos esgrimidos acerca del por qué dieron estas respuestas (pregunta 1.D) en gran parte aluden a que el *calentamiento sucedió en menor tiempo*, sólo priorizan la duración del tiempo en que suceden los fenómenos minimizando lo que sucede en el *eje de las f(t)*, muy pocos (solo 7 estudiantes) parecen utilizar cierta noción de razón de cambio al final del curso para argumentar su respuesta. En la *pregunta 3A*, para identificar el intervalo de *mayor brusquedad* de la variación, 18 en la primera aplicación y 23 en la segunda contestan correctamente; en esta pregunta se obtuvo una de las menores diferencias positivas de las preguntas de este grupo, tal vez porque en intervalos *grandes* sea evidente para la mayoría de los estudiantes identificar dónde *sube más rápido* el gráfico de una función. Al hacer un conteo global de las respuestas correctas dadas a este *primer grupo* de preguntas, sólo un estudiante contestó correctamente las cinco preguntas tanto en la primera como en la segunda aplicación, 3 contestaron correctamente en cuatro en la primera aplicación y 15 lo hacen en la segunda; 6 dan respuestas correctas en tres preguntas en la primera aplicación y 9 lo hacen en la segunda. Hay que destacar que en la segunda aplicación todos los estudiantes contestaron correctamente dos o más preguntas de este grupo. En términos generales aunque se perfila una tendencia hacia el desarrollo *óptimo* de las ideas de rapidez de la variación en al menos 25 estudiantes, esta tendencia es bien clara en 16 de ellos pues contestan correctamente el 80% o más de las preguntas planteadas a este respecto. Esta tendencia disminuye levemente en 9, los que se incluyen en una tendencia *aceptable*, pues contestan correctamente el 60% de las preguntas de este grupo y en 7 estudiantes apenas si se manifiesta, pues contestan correctamente menos de la mitad de las preguntas de este grupo.



RAPIDEZ DE LA VARIACION — VARIACION POSITIVA — VARIACION NEGATIVA — NO VARIACION

Gráfica 1

Las ideas del segundo grupo. La idea de *variación positiva* es explorada en las preguntas 2.B y 3.B. Respecto de la pregunta 2.B, en la primera aplicación 13 estudiantes dan respuestas correctas y en la segunda 29. A la pregunta 3.B, en la primera aplicación dan respuestas correctas 3 estudiantes y en la segunda 22. Es destacable el hecho que en la primera aplicación la mayoría de estudiantes consideran a la *variación positiva* como una idea equivalente de *función positiva*, no obstante la idea de variación positiva entendida como crecimiento de la función parece haberse desarrollado en la mayor parte de los estudiantes participantes la experiencia. La idea de *variación negativa* es explorada en las preguntas 2.C y 3.C, en la pregunta 2.C se observa un desarrollo significativo, ya que en la primera aplicación contestan correctamente 11 estudiantes y en la segunda 26. En la pregunta 3.C contestan correctamente en la primera aplicación 6 estudiantes y en la segunda 8 obteniéndose, aunque aquí hubo 14 que si bien señalaron intervalo donde efectivamente la variación es negativa, también señalaron el intervalo donde la función es negativa, esto muestra que tienen mayores dificultades en discernir la variación negativa cuando se les presenta un gráfico que también tenga intervalos donde sus valores son negativos.

La idea de *no variación* es explorada en las preguntas 1.B, 2.D y 3.D, se utilizan los términos de *estabilización* y puntos donde *cambia de sentido* la variación. En la pregunta 1.B, en la primera aplicación contestan correctamente 13 estudiantes y en la segunda 23, parece no haber muchas dificultades en los estudiantes en distinguir la *estabilización* de la variación cuando ésta sucede en intervalos *grandes*, aunque sí las hay cuando sucede a 0° C. A la pregunta 2.D dan respuestas aceptables en la primera aplicación sólo 2 estudiantes y en la segunda 13, esto indica que 11 estudiantes desarrollaron cierta idea de no-variación. En la pregunta 3.D, en la primera aplicación dan respuestas correctas 19 estudiantes y en la segunda 21, esto indica que para la mayoría de los estudiantes es clara la idea del cambio de sentido de la variación aunque es muy probable que no la asocien con la nulidad de la variación. Al hacer un conteo global de las respuestas correctas dadas a este grupo de preguntas, solamente 3 estudiantes contestaron correctamente a las 7 preguntas en la segunda aplicación y nadie lo logró en la primera; 5 lo hicieron en 6 preguntas en la segunda aplicación y uno en la primera, 8 lo hicieron en 5 preguntas en la segunda aplicación y sólo 3 en la primera, 4 lo hicieron en 4 preguntas en la segunda y 2 en la primera, etc.

2.1 Relación entre el desarrollo de ideas variacionales y la derivada:

Para evaluar los cuestionarios y exámenes y detectar tendencias, asignamos las categorías de óptimo, aceptable y deficiente. En las primeras dos categorías se ubicaron quienes contestaron más de la mitad de preguntas planteadas, este intervalo, a su vez se dividió en dos, la categoría óptimo correspondió a la mitad superior y la aceptable a la mitad inferior. La categoría de deficiente correspondió a quienes contestaron menos de la mitad de preguntas planteadas.

Al comparar el desarrollo las ideas variacionales de los estudiantes y el desarrollo observado en los exámenes que exploran la comprensión del concepto de derivada, encontramos que casi todos los estudiantes que desarrollaron *óptima* o *aceptablemente* sus ideas variacionales, también lo lograron en cuanto a la compresión de la derivada. Aunque en ninguno de los casos, un desarrollo *óptimo* de las ideas variacionales correspondió a un desarrollo *óptimo* de las concepciones y habilidades exploradas en los exámenes acerca del concepto de derivada, en cambio 3 de los 6 estudiantes que desarrollaron *óptimamente* sus ideas variacionale sólo alcanzaron un desarrollo *aceptable* en la comprensión de la derivada. Estos datos son indicativos de que, el desarrollo de ideas variacionales no es condición necesaria y suficiente para comprender el concepto de derivada.

Más del 50% (16) de los estudiantes participantes en la experiencia desarrollaron *óptima* o *aceptablemente* sus concepciones y habilidades tomadas como indicativas de la compresión del concepto de derivada. Estos estudiantes, con las diferencias que implicadas pos su ubicación en ambas categorías, dieron muestras de poder resolver problemas sencillos sobre velocidad y rapidez media o instantánea, de interpretar adecuadamente la simbología utilizada en la definición del concepto, mostraron indicios de un acercamiento aceptable a la idea de límite del cociente incremental por la vía numérica, aunque tuvieron muchas deficiencias en la interpretación geométrica. En particular estas habilidades fueron más claramente visibles en 10 estudiantes (31.2%), los que alcanzaron un desarrollo *óptimo*, en 8 estudiantes (25%) estas habilidades fueron desarrolladas *aceptablemente* y en 14 (43.7%) las deficiencias son numerosas.

Referencias Bibliográficas:

- **Dolores, C**. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato*. Tesis Doctoral (Inédita). Biblioteca de la Facultad de Matemáticas de la UAG. Chilpancingo Gro., Méx.
- **Wenzelburger, E**. (1993).*Cálculo Diferencial*. Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F.
- **Talízina, N.** (1993). *Los fundamentos de la enseñanza en la educación superior*. UAM Xochimilco, Angeles Editores, México D. F., 1993.

Estructura de los problemas aditivos en el campo conceptual de las magnitudes discretas relativas

Socas, M.M., Hernández, J.y Noda, A.
Universidad de La Laguna. España

En la actualidad los estudios realizados sobre los problemas aritméticos elementales verbales (PAEV) que se resuelven con una suma o una resta, son abundantes e informan acertadamente sobre las diferentes variables -lingüísticas, estructurales o semánticas- que intervienen en la resolución de un PAEV aditivo, especialmente cuando son formulados con cantidades discretas absolutas. No sucede lo mismo cuando los PAEV son formulados con cantidades discretas relativas.

Entre los enfoques teóricos básicos que organizan este dominio de investigación cabe destacar el enfoque de las categorías semánticas de los enunciados de los problemas que se sustenta fundamentalmente en las teorías cognitivas del procesamiento de la información y su estudio se centra en el análisis global del significado del texto mediante el que se enuncia el problema, donde inicialmente, Heller y Greeno (1978) establecieron tres categorías semánticas: cambio, combinación y comparación, y posteriormente, Carpenter y Moser (1983) añaden la categoría de igualación, llegándose a enumerar 20 situaciones diferentes; y el enfoque desde las relaciones aditivas que se dan en los problemas verbales aritméticos con magnitudes discretas relativas, mediante el uso de medidas, transformaciones y relaciones estáticas, en el marco de la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1982), donde plantea la existencia de seis grandes categorías de relaciones numéricas aditivas: I. Composición de medidas, II. Transformación de una medida en otra medida (STS), III. Relación estática entre dos medidas (SRS), IV. Composición de dos transformaciones (TTT), V. Transformación de una relación estática (estado relativo) en otra relación estática (estado relativo) (RTR), y VI. Composición de dos relaciones estáticas (estados relativos) (RRR).

Si consideramos, por ejemplo, los problemas siguientes: Juan tiene 6 boliches y juega una partida con Luis y pierde 8 boliches. ¿Cuántos boliches debe Juan a Luis, y, En el recreo, Juan ganó 6 canicas y Pedro ganó 5 más que Juan. ¿Cuántas canicas ganó Pedro?,

y los analizamos desde los dos enfoques teóricos, no pertenecerían a ninguna categoría semántica, salvo que aceptáramos en el segundo la comparación entre variaciones, y tampoco estaría identificado en las categorías establecidas por Vergnaud para el campo conceptual aditivo de las magnitudes relativas, al tratarse en el primer caso de un problema de la forma STR (transformación que une un estado y una relación) y en el segundo del tipo TRT (relación entre transformaciones), categorías no identificadas por Vergnaud.

La finalidad de nuestro estudio es ampliar el marco teórico existente y mostrar que el grupo aditivo y ordenado de los números enteros es un buen modelo que caracteriza el campo conceptual de las magnitudes discretas, y que las categorías de cambio, combinación y comparación son pertinentes para la clasificación de los problemas.

Diagrama aditivo de los esquemas partes-todo:

La noción de esquema. es de gran importancia en la psicología cognitiva actual, se considera como un elemento fundamental dentro de la estructura cognitiva. De forma gráfica representaremos las relaciones entre las partes v el todo con el diagrama siguiente:

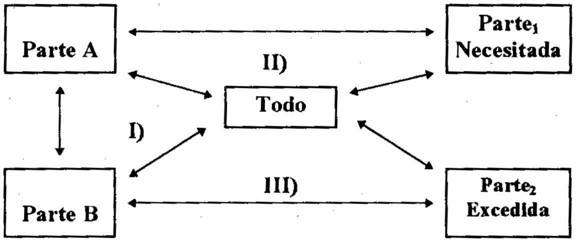


Figura 1: Diagrama aditivo de los esquemas partes-todo

El diagrama se organiza en tres grupos (I, II, III), donde el I representa todas las operaciones aditivas posibles de unión entre las partes y de separación del todo (esquema parte-parte-todo), y los grupos II y III, las relaciones asimétricas, es decir, las relaciones entre la parte y el todo expresado por sus diferencias ordenadas (esquema parte-todo).

Es necesario dotar a este diagrama de una interpretación explícita de todas las relaciones aditivas que se dan en el supuesto de que las partes y el todo puedan ser consideradas no sólo como cantidades orientadas positivas sino también orientadas negativas. Estas relaciones quedan claramente determinadas por la relación de Chasles.

Organización del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas

El propósito es la construcción de un modelo de competencias constituido por: elementos epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos asociados al campo conceptual aditivo de los números naturales y enteros.

Procediendo de esta manera obtenemos una primera clasificación del campo conceptual aditivo en dos grandes categorías determinadas por los esquemas, parte-parte-todo y parte-todo, del diagrama aditivo: Las operaciones aditivas (Grupo I) y las relaciones asimétricas (Grupos II y III).

Las operaciones aditivas:

Las operaciones aditivas están representadas por el grupo I del diagrama aditivo del esquema parte-parte-todo y tienen como elementos organizadores a la forma canónica de la operación aditiva a+b=c, que correspondería al aspecto epistemológico; a los significados de los fenómenos asociados a los números y a las magnitudes, y a todas las relaciones posibles entre estos números o magnitudes expresados por la relación de Chasles dentro del diagrama aditivo del esquema parte-parte-todo.

Si hacemos intervenir las relaciones posibles organizadas por el esquema parte-parte-todo del diagrama aditivo mediante la relación de Chasles, obtenemos todas las operaciones aditivas del campo conceptual con las magnitudes discretas, que son en total 108.

Forma canónica $a+b=c$	Número=Magnitud Estado, Variación, Mixta	Relación parte-parte-todo Relación de Chasles	Total
3	6	6	108

Tabla 1

De las que 18 serían de combinación y 90 de cambio.

Las relaciones asimétricas:

Las relaciones asimétricas están representadas por el esquema parte-todo, grupos II y III del diagrama aditivo (Fig. 1). Si hacemos intervenir todas las relaciones posibles obtenemos que las relaciones asimétricas (grupo II, parte necesitada) del campo conceptual de las magnitudes discretas son 24. (Análogamente, grupo III, parte excedida).

Forma canónica $a - b = c$	Número=Magnitud -Estado, Variación	Relación parte-todo Relación de Chasles	Total
3	2	4	24

Tabla 2

Las operaciones aditivas y las relaciones asimétricas y las otras categorías:

Al analizar las seis categorías de Vergnaud (1982) dentro del modelo de competencias nos encontramos con la necesidad de reorganizar estas categorías al encontrar categorías aditivas que no corresponden a este nivel estructural y problemas formulados en una categoría que corresponderían a otra, entre otras cosas.

Por ejemplo, las categorías I, II, IV y V corresponden dentro del diagrama aditivo del esquema parte-parte-todo a las operaciones aditivas (Grupo I), y dentro de éste a las operaciones aditivas de combinación, la categoría I, y a las operaciones aditivas de cambio, las categorías II, IV y V. La categoría I de Vergnaud, coincide con la categoría de combinar de Carpenter y Moser (1983), y en ella sólo se admite que el número actúe como estado y con valores positivos.

Las categorías II, IV y V estarían dentro de las operaciones aditivas de cambio. La categoría II coincide con la categoría de Cambio de Carpenter y Moser (1983).

Consideraciones finales:

Esta propuesta de organización constituye un modelo de competencias para el campo conceptual aditivo que integra los elementos y relaciones que se dan en este campo, permite una nueva clasificación de las diferentes situaciones y problemas del mismo, integra y explica resultados de otras investigaciones y facilita la relación con un posible modelo de ejecución.

El modelo de competencias presenta de manera unificada las categorías semánticas del campo conceptual aditivo discreto, no sólo desde una perspectiva lógico-formal, que se da en las otras categorizaciones, sino también desde la perspectiva de las leyes de composición, de los fenómenos asociados y de las estructuras cognitivas implicadas.

En definitiva, hemos considerado bajo una única estructura (modelo de competencias) diferentes conceptos y relaciones, a veces no clasificados que regulan el funcionamiento del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas.

Referencias Bibliográficas:

- **Carpenter, T. y Moser, J.** (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y Landau (Eds) *Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes.* (Academic Press: New York).
- **Heller, J. y Greeno.** (1978). *Semantic processing in arithmetic word problem solving.* Paper presentado en Midwestern Psychological Association Convention. (Chicago).
- **Vergnaud, G**. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En Carpenter, Moser y Romberg (Eds) *Addition and subtraction: A cognitive perspective (pp. 9-24).* (Lawrence Erlbaum: Hillsdale, N.J).
- **Socas, M.; Hernández, J. y Noda, A.** (1996). Modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas relativas. *Enseñanza de las Ciencias.*(to appear).

Movimiento uniformemente acelerado. Construcción de la expresión $\bar{v}=\frac{1}{2}(v_0+v)$ utilizando progresiones aritméticas

Enrique Moreno Rosales y Martha Maldonado Rosales.
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN. México

La expresión $\bar{v}=\frac{1}{2}(v_0+v)$, válida únicamente en el movimiento uniformemente acelerado, genera la impresión en los estudiantes del nivel medio superior y primeros semestres de ciencias e ingeniería, de que los términos velocidad media y velocidad promedio son equivalentes, aún cuando la velocidad sea variable.

En este trabajo pretendemos mostrar cuales son las causas que determinan esta impresión hasta cierto punto equivocada y al mismo tiempo, sugerimos una alternativa de enseñanza basada en las progresiones aritméticas. Para lograrlo hemos elaborado un análisis de los textos de física más utilizados en México como son: Halliday-Resnick; Sears-Zemansky; Feynman ; y *Mecánica* de la serie Berkeley. En todos ellos (y en muchos otros menos conocidos) el argumento esencial es de tipo geométrico, sin embargo, se pasa por alto que la fórmula para la velocidad instantánea $v=v_0+at$, genera para intervalos iguales de tiempo, una progresión aritmética cuyo promedio está dado por $\bar{v}=\frac{1}{2}(v_0+v)$.

El estudio del movimiento uniformemente acelerado (m.u.a.), es abordado por Galileo en su obra: *Discurso y demostraciones matemáticas en torno a dos nuevas ciencias*[1], sin embargo, el contexto de su presentación es esencialmente geométrico y no hace referencia *explícita* al hecho estudiado ampliamente por Gauss referente a las progresiones aritméticas, argumento esencial para la comprensión en un contexto algebraico de la noción de velocidad media del m.u.a.

¿Por qué utilizar una progresión aritmética? Bueno, resulta que la definición de aceleración constante señala: una partícula se mueve con aceleración constante si ésta incrementa su velocidad en una misma cantidad a intervalos iguales de tiempo. Una progresión aritmética es una sucesión en donde cada término se obtiene del precedente incrementándole una cantidad constante. Las dos definiciones son equivalentes. Los términos progresión aritmética y aceleración constante corresponden respectivamente al terreno de la matemática y la física, en realidad, a partir de Galileo estas dos ciencias constituyeron la física-matemática.

Existen al menos dos razones para especular por que Galileo no llegó aun más lejos en sus investigaciones:

La obra de Galileo Discurso y disertaciones matemáticas en torno a dos nuevas ciencias se publicó en el mismo año en que Descartes publica su Geometría Analítica .

Galileo no recurrió a las progresiones aritméticas porque éstas fueron redescubiertas por Gauss, quien nació ciento treinta y cinco años después de la muerte de aquél y que junto con Cauchy y Weierstrass fundamentaron el análisis.

Analicemos ahora la situación física. Si la aceleración es constante, no importa que sólo contemos con un conjunto discreto de velocidades como muestra, siempre y cuando, éstas correspondan intervalos iguales de tiempo. Aquí los términos velocidad promedio y velocidad media son equivalentes, porque el caso continuo corresponde al caso límite cuando $\Delta t \to 0$.

Esta es la razón por la que afirmamos que la expresión $\bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ es fundamental y ha sido señalado con anterioridad por Cantoral[2]:

El análisis detallado de la evolución de este conocimiento ejemplifica el cambio de paradigma científico característico del siglo diecisiete.

Existe una relación dialéctica entre las nociones de predicción en los fenómenos físicos del cambio y la variación y lo analítico en la matemática del movimiento.

Las afirmaciones de Galileo establecen tácitamente la variación continua de la velocidad. Y en consecuencia la evaluación de lo variable por lo constante: el promedio.

Algunas de las ideas desarrolladas por Galileo tuvieron antecedente en los filósofos lógicos del Merton College quienes utilizaban el Teorema del Grado Medio, versión primera del Axioma del Supremo y sus consecuentes Teoremas de continuidad del actual análisis clásico real.

Trataremos ahora de justificar la expresión motivo de estudio:

Si la aceleración es constante, la aceleración media es igual a la aceleración instantánea, es decir:

$$\bar{a} = a = \frac{v - v_0}{t - t_0} \quad \text{-----} \quad (1)$$

Tomando $t_0 = 0$,

$$a = \frac{v - v_0}{t} \quad \text{-----} \quad (2)$$

Despejando v de la expresión (2), obtenemos:

$$v = v_0 + at \quad \text{-----} \quad (3)$$

Escribiendo la velocidad v como función del tiempo tenemos:

$$v(t) = v_0 + at \quad \text{-----} \quad (4)$$

Dividamos el intervalo temporal en n partes iguales (para simplificar, consideremos que $t = n$ seg.)

$$v_0 = v(0) = v_0$$
$$v_1 = v(1) = v_0 + a$$
$$v_2 = v(2) = v_0 + 2a$$

$$v_n = v(n) = v_0 + na$$

$$\sum_{i=0}^{n} v_i = (n+1)v_0 + a(1+2+3+\ldots+n)$$

$$= (n+1)v_0 + \frac{1}{2}n(n+1)a$$

$$= \frac{2(n+1)v_0}{2} + \frac{1}{2}n(n+1)a$$

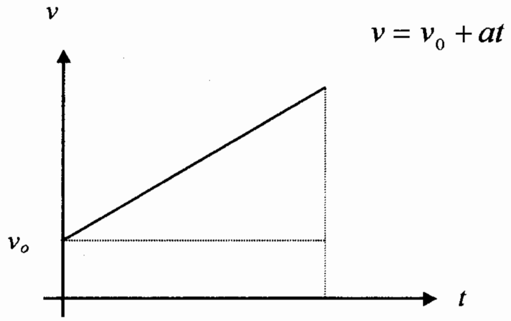
$$= \frac{1}{2}(n+1)[2v_0 + na]$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)[v_0 + (v_0 + na)]$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)[v_0 + v] \text{, por tanto}$$

$$\bar{v} = \frac{\sum_{i=0}^{n} v_i}{n+1} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$$

Este resultado puede ser obtenido por simetría, como sigue:



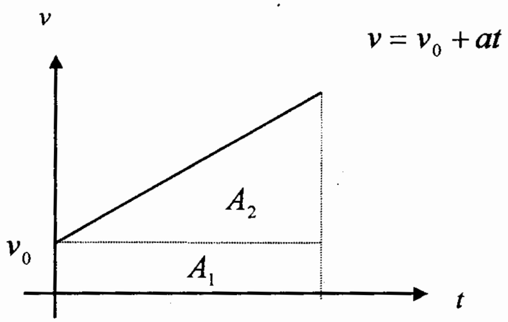
Del diagrama, el valor medio de las ordenadas correspondientes a la función $v = v_0 + at$ está dado por:

$$\bar{v} = v_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v) = \frac{1}{2}(v + v_0)$$

O bien, considerando el análisis dimensional, el producto velocidad por tiempo, corresponde al espacio recorrido, i. e.,

$$\bar{v} = \frac{A_1 + A_2}{t} = \frac{v_0 t + \frac{1}{2}[v - v_0]t}{t} = v_0 + \frac{1}{2}(v - v_0) = \frac{1}{2}(v_0 + v)$$

Finalmente, podemos interpretar el área bajo la curva como la distancia y utilizar la relación:



$\bar{v} = \dfrac{x}{t}$ con $x = \int_0^t (v_0 + at)dt$ para obtener el mismo resultado, sin tener que recurrir a $\bar{f} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \cdot$

Referencias Bibliográficas:

- **Galilei, G.** (1638). *Discurso y disertaciones matemáticas en torno a dos nuevas ciencias*
- **Cantoral, R.** (1990). Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propia del Pensamiento Físico para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría Elemental de Funciones Analíticas. *Tesis Doctoral.*

Estudio didáctico de la función 2^x

Priciliano Aguilar, Rosa María Farfán, Javier Lezama*, Julio Moreno1 **
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

Resumen: La investigación consiste en el diseño, puesta en escena y análisis de resultados de una secuencia de actividades encaminada a que el estudiante construya la noción de función exponencial, favoreciendo la realización de acciones, las cuales serán desarrolladas paso a paso, a partir de criterios geométricos, localizando puntos en el plano, observando las dificultades para obtenerlos, escribiendo tablas, e identificando regularidades que propicien la generalización. Se utilizado a la ingeniería didáctica como metodología de investigación.

La situación didáctica diseñada atiende a: Elementos geométricos y gráficos que se requieren en las actividades en las que se les solicita efectúen trazos y la localización de puntos en un sistema coordenadas rectangulares. Inducción de lo local a lo global, que se presenta en las actividades en que se les solicita argumentar la posibilidad de localizar otros puntos, y en las que se deberá argumentar sobre los cocientes y las diferencias que se observarán en otras tablas diferentes a las analizadas. También está presente el elemento de generalización, el cual se puede encontrar en la actividad en que se les pide analizar si las regularidades detectadas para 2^x se observarán en otras expresiones distintas.

Exploración preliminar: Una vez que hemos visto que es posible hacer una construcción geométrica de la función 2^x, el interés ahora es conocer las concepciones que de esta función se tienen en el medio escolar, para lo cual hacemos una exploración preliminar a través de un cuestionario con el siguiente propósito:

"Tener un primer acercamiento a las concepciones que los estudiantes tienen sobre la función 2^x".

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

2^x es una operación solo para los enteros, ya que interpretan 2^x como multiplicar 2 por si mismo " x veces".

Cuando $x < 0$ no hay una interpretación uniforme para 2^x como lo muestran las siguientes respuestas: $2^{-3} = .002$, $2^{-3} = (-2)(-2)(-2) = -8$, $2^{-3} = 1/2^3$.

Si x no es entero, 2^x es solamente una notación ($2^{1/2} = \sqrt{2}$; $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$), 2^π es un numero que no se puede calcular ya que carecen de un algoritmo para calcularlo y sólo se pueden obtener una aproximación con el auxilio de la calculadora.

La intención ahora, es observar qué logros y que dificultades se presenta cuando los estudiantes abordan la función 2^x usando la construcción que presentamos. Para lo cual diseñamos una secuencia didáctica en la que se le proponen actividades a fin de que pueda emplear algoritmos geométricos

---

1 *Becarios de Conacyt*

que podrían ser útiles en una posible construcción, así como la elaboración de tablas donde podrá identificar regularidades.

La secuencia:

Objetivos:

Proporcionar un proceso geométrico de construcción de puntos de la gráfica de la función 2^x, así como identificar y analizar regularidades propias de la función.

Confrontar la concepción espontánea de que 2^x es evaluable sólo cuando x es entero.

Análisis a priori:

Los estudiantes evaluarán a 2^x ,cuando x no es entero, asociándola con magnitudes.

Presentación del diseño:

El diseño se compone de tres etapas:

Primera etapa:

Proporciona los conocimientos geométricos para obtener raíces y productos, empleando respectivamente la altura del triángulo rectángulo inscrito en una semicircunferencia y semejanza de triángulos. Esta etapa constituye una fase de acción preparatoria, pues se busca que en ella el estudiante conozca técnicas y desarrolle habilidad para encontrar el segmentos que sea la raíz cuadrada de otro o el producto de dos segmentos dados.

Comentarios: A continuación se da un análisis a priori de cada una de las etapas de la secuencia, haciendo explícito cómo se espera que sea el desarrollo de la actividad y las posibles dificultades que enfrentará el estudiante.

Las actividades correspondientes a esta etapa propician el que los estudiantes entren en acción, dibujando las figuras correspondientes con el fin de comprender las afirmaciones propuestas.

Pueden tener los estudiantes dificultades con la noción de semicircunferencia y lo que significa inscribir en ella un triángulo.

El triángulo inscrito es rectángulo, el convencerse de este hecho y justificarlo puede constituirse en dificultad para algunos estudiantes. Pueden algunos de ellos analizar sólo unos casos particulares y formular generalizaciones sin llegar a una justificación convincente.

En la construcción de segmentos de longitud $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, es posible que empleen distintos segmentos como unidad.

Puede no recordar la noción de semejanza y el hecho de que los lados homólogos son proporcionales.

Es posible que no puedan establecer el arreglo necesario para hacer uso de la semejanza en la obtención de los productos: $(\sqrt{2}\sqrt{3})$ $(\sqrt{5}\ \sqrt{3})$.

Algunos estudiantes se darán cuenta que el método estudiado sólo sirve para obtener raíces de índice 2^p, y no para raíces cúbicas, quintas, etc.

Como los resultados y técnicas desarrolladas en esta etapa son fundamentales para el desarrollo de la siguiente, es particularmente importante la discusión en grupo de los trabajos de los equipo. Es conveniente que en esta actividad de institucionalización se resuelvan todas las dudas.

Segunda Etapa:

En donde se aplican los conocimientos adquiridos en la etapa anterior para construir seis puntos de la gráfica de la función 2^x en el intervalo [0,2].

En esta etapa se desarrollan actividades correspondientes a fases de acción y de formulación.

Comentarios:Puede haber dificultad para identificar la unidad, es decir hacer uso de la unidad establecida en el dibujo para que con base en ella se hagan las construcciones que se indican.

La construcción de los segmentos solicitados puede hacerse sobre los ejes cartesianos (es lo recomendable), o aparte, pero se corre el riesgo de que modifiquen la unidad en cada trazo.

Tienen especial dificultad la obtención de los segmentos $2^{1/4}$ y $2^{3/4}$ ya que para el primero se requiere hacer uso del segmento $2^{1/2}$ y construir en términos de él y para el segundo habrá que descomponer $2^{3/4}$ en $2^{1/2} * 2^{1/4}$.

Puede ser que algunos estudiantes intenten localizar los segmentos al tanteo y habrá que solicitarles que relean la pregunta.

Algunos estudiantes unirán los puntos localizados haciendo un trazo continuo habrá que solicitarles que justifiquen.

Algunos estudiantes contestarán a las preguntas con un sí o un no, sin justificar, habrá que solicitarles que amplíen sus respuestas..

Algunos estudiantes harán explícito el que con la técnica desarrollada solamente se pueden obtener segmentos correspondientes a números de la forma $2^{\frac{p}{2^q}}$.

Tercera Etapa:

En la tercera etapa por medio de tablas de 2^x se tratan de obtener regularidades que la caractericen.

En esta etapa se desarrollan actividades correspondientes a fases de acción, de formulación y validación.

Comentarios: Se espera que los estudiantes al identificar los distintos incrementos de la variable x los relacionen por contraste con la manera en que esta creciendo la función en cada caso.

Se espera que los estudiantes identifiquen la progresión aritmética en el dominio y la progresión geométrica en el rango.

Se espera que los estudiantes identifiquen el carácter creciente de la función.

Se espera que identifiquen los problemas de intentar trazar en forma continua la función 2^x ya que la técnica desarrollada permite ver la posibilidad teórica de trazar una infinidad de puntos pero también deja ver que faltan una infinidad de puntos.

Se espera puedan abrir la discusión en el caso de cambiar la base 2 a otra cualquiera *a*, analizando los posibles valores de *a*.

Puesta en escena y observaciones relevantes.

Daremos a continuación una visión de conjunto de hechos relevantes suscitados por la puesta en escena de la secuencia

Escenario:

Las tres etapas se desarrollaron en una sola sesión, cada etapa de trabajo consistió en una hora de trabajo en equipo por una hora de discusión grupal.

Se formaron 5 equipos de 3 estudiantes cada uno clasificados por semestres, acompañados por un observador.

Se elaboraron registros escritos, por el observador, además cada equipo escribió un reporte detallado del desarrollo de la actividad y un acetato al final de cada etapa en la que se realizó discusión grupal con el fin de generar consenso y observar las argumentaciones de sus resultados, así como su defensa. Se cuenta con grabación de audio por cada etapa y filmación de las discusiones grupales.

Actividad matemática desarrollada por los estudiantes.

Hubo manipulación del número $2^{1/2}$, ya que los estudiantes hallaron geométricamente un segmento de magnitud $2^{1/2}$, ubicaron en el plano el punto de coordenadas $(1/2, 2^{1/2})$ y lo utilizaron para encontrar el segmento de magnitud $2^{1/4}$.

Se abrió la discusión sobre la generalización a a^x, en algunos equipos se preguntaron como obtener geométricamente $2^{1/3}$ y al discutir las regularidades de 2^x algunos estudiantes afirmaron que se podía cambiar el 2 por cualquier número a y las regularidades eran las mismas.

Al considerar la base *a* arbitraria, si tomaron en cuenta los casos en q dicho número fuera 0, 1 ó negativo. En el caso de ser $a < 0$ discutieron las dificultades que se presentaban cuando el exponente era ½ ó de la forma $1/2^n$, afirmando que el número que se obtenía era complejo y que no se podía graficar. Para algunos estudiantes la aparición de raíces cuadradas de números negativos no constituía dificultad alguna, pues únicamente extendían su álgebra conocida a estos nuevos objetos matemáticos.

La palabra "verificar" se asoció con demostrar y para algunos estudiantes represento una verdadera dificultad. El verificar que el triángulo inscrito en la semicircunferencia era rectángulo orilló a algunos equipos a elaborar argumentos algebraicos y geométricos que en general no encontraron, mientras que a otros equipos bastó con comparar el ángulo del dibujo y el ángulo recto de su escuadra para convencerse.

El tomar la unidad en forma arbitraria y no la correspondiente a la escala dada en el dibujo trajo dificultades para unos equipos en el desarrollo de la segunda etapa pues no había correspondencia a los segmentos encontrados y los dados en el dibujo.

Actitudes de los estudiantes.

El contraste en el desempeño de los equipos fue grande y dependió básicamente del nivel educativo del equipo y su correspondiente bagaje matemático. Sin embargo, todos se comprometieron con el trabajo solicitado en cada una de las etapas.

La primera etapa la completaron únicamente los equipos de quinto semestre y en la discusión grupal no todos los estudiantes aclararon sus dudas a pesar de la explicación del profesor que conducía la discusión.

La segunda etapa fue de mayores contrastes, algunos equipos la concluyeron bien (alumnos de tercero y quinto semestre), un equipo empleó un procedimiento distinto al indicado (alumnos de tercer semestre) y el equipo de primer semestre no pudo desarrollarla, la interpretación primaria de 2^x como el producto de x-veces 2, les hizo dudar de la posibilidad de existencia o cálculo de $2^{1/2}$. Sin embargo desarrollaron una estrategia para ubicar ese segmento en caso de que existiera.

La tercera etapa la concluyeron todos.

La segunda etapa pedía localizar únicamente puntos en el plano, sin embargo algunos equipos hicieron un trazo continuo uniéndolos.

Conclusiones: Con base en las observaciones que se describen arriba la secuencia de actividaes permitió a los estudiantes:

Romper la idea de que 2^x sólo tiene sentido para cuando x es un número entero.

Manipular el número $2^{1/2}$, ya que obtuvieron segmentos de longitud $2^{1/2}$.

Reconocer la naturaleza creciente de 2^x.

Aplicacion de los fundamentos de la ingenieria didactica al diseño de situaciones de enseñanza en el nivel medio de escolaridad[2]

José Villella (dir. proyecto)
Ana María Bach, Vilma Intagliata, Marta Rozenberg (revis. y supervis)
Instituto Glaux, C. de investigación. Buenos Aires, Argentina.

Introducción:

El centro de Investigación, Perfeccionamiento y actualización educativa Glaux, diseñó , a pedido de las autoridades del Instituto Glaux de Enseñanza Media - Modalidad Bachillerato Mercantil y Bachillerato con Orientación en Informática- una evaluación diagnóstica de las competencias de los alumnos de primero, tercero y quinto años respecto de los contenidos del área de la matemática. Los resultados de esa evaluación arrojaron como denominador común un gran déficit en el dominio que los alumnos tenían respecto de ciertos saberes considerados básicos desde los distintos diseños curriculares en vigencia: concepto de función, razonamiento geométrico, utilización de herramientas matemáticas en la resolución de situaciones problemáticas, que se caracterizaron a través de las siguientes notas:

cuanto más escolarizado está el alumno más problemas en la aplicación de herramientas matemáticas presenta,

- los alumnos carecen de suficiente práctica en la resolución de situaciones problemáticas,
- se debe insistir más en la justificación de las tareas así como en el acercamiento paulatino al rigor matemático,
- las actividades que se proponen a los alumnos deben ser posibles de resolverse heurísticamente,sin despreciar por ello el valor instrumental del algoritmo ,
- la matemática debe llegar a los alumnos desde su valor instrumental para que en sus justificaciones logre su valor formativo,
- la geometría debe tratarse prescindiendo lo más que se pueda de lo analítico para transformarse en una adecuada herramienta para el estudio del espacio

Esto motivó el diseño de un proyecto de investigación centrado en la reformulación de algunos principios metodológicos aplicados por los profesores hasta el momento, que tomó sus fundamentos teóricos de las teorías psicológicas de raiz constructivista y los aportes de la teoría de las situaciones didácticas al igual que la de la ingeniería didáctica en cuanto al diseño de situaciones. Este trabajo muestra algunos de los aspectos sobresalientes de dicho proyecto

<u>Nombre del proyecto:</u> Matemática: una poderosa herramienta de aplicación

---

2 El trabajo toma en consideración los fundamentos de la teoría de la ingeniería didáctica y lo aplica a una escuela de educación media - alumnos de 12 a 17 años- de Buenos Aires, Argentina.

Etapas de ejecución[3]:

1a. Etapa: primero y segundos años del Bachillerato Mercantil - 1992-

2a. Etapa: tercero, cuartos y quintos años del Bachillerato Mercantil- 1993-1994

3a. Etapa: Primero a quintos años del Bachillertato con Orientación en Informática. -1995-1997 (en ejecución)

Objetivos del proyecto:

- Lograr un diseño de situación de enseñanza que permita a los alumnos:
- aplicar la teoría matemática en la elaboración de estrategias para solucionar problemas de la vida cotidiana.
- establecer relaciones cuantificables entre objetos , acontecimientos y acciones.
- cuantificar relaciones métricas en espacios de una, dos y tres dimensiones.
- valorar la opinión ajena frente a una situación problemática de cualquier origen.
- aceptar el error como una instancia positiva en su proceso de aprendizaje.
- socializar su conocimiento mediante la interacción con los otros.

Desarrollo del proyecto:

A la etapa de la evaluación diagnóstica le siguió el diseño del proyecto en sí mismo. Los borradores del mismo fueron discutidos con los docentes encargados del área en los distintos cursos y sometidos a evaluaciones externas a la institución, de prestigiosos docentes del área[4]. Finalizada su corrección se lo implementó de acuerdo al siguiente plan de acción:

1- *elaboración de las estrategias de clase por parte de todos los docentes del área para todos los cursos:* Se utilizaron videos sobre temas no matemáticos- por ejemplo un día en la Península de Valdés, donde se muestra cómo viven y se organizan los animales característicos de la zona del sur de Argentina- y a partir de su análisis se armaron guías de trabajo con problemas relacionados a contenidos matemáticos de los distintos años: modelos geométricos, estimación de distancias, aproximación de tamaños, cálculo aproximado de los individuos de una población, elaboración de pronósticos, recolección y organización de datos... Se remitió a la lectura de la bibliografía destinada a los alumnos de acceso desde la biblioteca y se pidió la comparación de los

3 El diseño de las etapas obedece al orden de creación de las distintas divisiones del Instituto.

4 Entre ellos cabe mencionar a la Prof. Elsa de Martino, autora de numerosas obras para los distintos niveles, responsable del Diseño Curricular que se puso en vigencia en la década del 80 en las escuelas primarias de la ciudad de Buenos Aires. Coordinadora de encuentros de capacitación docente

resultados y las estrategias con las propuestas por los distintos autores de esos materiales.

Los docentes se acercaron, asimismo, a la lectura de los fundamentos teóricos de la propuesta metodológica del proyecto (Artigue, Ausubel, Brousseau, Chevallard, Douady, Piaget, Van Hiele, Vygotsky, entre otros)

2- Se diseñaron soportes de evaluación para determinar el grado de apropiación de los contenidos por parte de los alumnos. Dichos soportes fueron sometidos a pruebas de fiabilidad antes de su administración y sus resultados leídos de manera conjunta por todo el equipo. Su tabulación se realizó a partir de la escala Mal, Regular, Bien, muy Bien para suprimir connotaciones no pertinentes al proyecto y desestimar la tendencia al valor central - propia de las escalas cualitativas de número impar de atributos-. Algunos de los items seleccionados se muestran a continuación:

a- Escribir el dígito correspondiente a la potencia 37 del número 23

b- Enunciar los pasos necesarios para determinar la profundidad de un pozo del que no se conocen más medidas que la de la de su boca

c- ¿Cuánto mide la superficie de una cabeza de alfiler? ¿Qué unidad de medida es la más conveniente para expresar el resultado?,

d- Escribir una serie de recomendaciones para calcular la cantidad de peces de una laguna.

3- Se establecieron jornadas de intercambio de experiencias para propiciar en los alumnos la necesidad del uso del lengujae matemático en función de una comunicación eficaz de sus experiencias, sus logros y sus desaciertos frente a las situaciones propuestas en cada caso

4- Se propició el intercambio de docentes para cada grupo de manera que cualquier docente del área pudo trabajar con cualquier grupo de alumnos y en algunos casos se instaló el concepto de la pareja pedagógica para realizar el trabajo en forma conjunta.

5- Se diseñaron materiales didácticos con características apropiadas para cada grupo de alumnos, incluyendo material descartable así como otros de venta comercial

Durante el desarrollo de los encuentros cada docente, al igual que los supervisores ,confeccionaba alternativamente para grupos de alumnos o en forma individual ,los registros narrativos o de competencias del área necesarios para el monitoreo de la acción. Las fichas de seguimiento se componen de los siguientes items:

- tener capacidad de iniciativa
- cuidar el ambiente escolar físico y social
- resolver satisfactoriamente las tareas
- reconocer el error
- valorar el trabajo propio y ajeno

- colaborar con el desarrollo de las actividades.

Las mismas son debatidas luego de confeccionadas con los alumnos, y de ese debate surge la calificación correpondiente al período trabajado, con lo cual el tema de la legalización de los saberes y la acreditación de los mismos queda resuelto.

La aplicación del proyecto motivó a su vez una minuciosa lectura de los contenidos básicos del área que desembocó en acuerdos grupales entre los docentes acerca del significado y alcance de los mismos en el aula los que llevaron a un cambio en la concepción de la planificación.

A partir de la ejecución del proyecto, la planificación da cuenta de la organización de los contenidos mínimos para cada año de la escolaridad en proyectos de trabajo generados a partir de la formulación de un problema, considerado como:" toda aquella situación con un objetivo a lograr, que requiere del sujeto una serie de acciones u operaciones para obtener su solución, de la que no dispone en forma inmediata, obligándolo a engendrar nuevos conocimientos, modificando - enriqueciendo o rechazando- los que hasta el momento poseia."(CBC- MCyE de la Nación)

Continuidad del proyecto:

Lo relatado corresponde al período 1993-1996. Durante el mismo la evaluación de los alumnos ha sido positiva en cuanto a la metodología implementada y cuantitativamente óptima si se considera que el 85% de los egresados ha aprobado por promoción directa las primeras de las asignaturas del área en sus respectivos estudios superiores y el 15% restante lo ha hecho en un sólo intento de examen final.

Asimismo y en función de la reforma educativa que se implementa en Argentina, las siguientes son las etapas de trabajo propuestas para este año:

análisis de las redes conceptuales que relacionan los contenidos del nivel polimodal

diseño de situaciones de enseñanza que favorezcan la articulación entre los distintos niveles que conforman la estructura del Instituto (EGB, Polimodal)

diseño e implementación de ajustes a las planificaciones del área tendientes al logro de una propuesta más interdisciplinaria.

contratación de asistencia técnica para los docentes intervinientes.

Referencias Bibliográficas[5]:

- **Alsina, C.** (1982). *Invitación a la Didáctica de la Geometria.*- Madrid- Síntesis.
- **Artigue, M.** (1995). *Ingeniería Didáctica.* Bogotá. Iberoamerciana.
- **Ausubel, W.** (1992). *Psicología evolutiva*- México- Trillas.
- **Brousseau, G.**(1986). *Fondements et methodes de la didactique des mathematiques.*- París.
- **Crowley, J.** (1987). *The Van Hiele Model of development of geometric thought, en NCTM Learning and teaching geometry K-12.*

5 Se consignan sólo los títulos que vertebran el proyecto. Hay muchos otros que por razones espaciales se omiten.

MATEMÁTICA EDUCATIVA EN LATINOAMÉRICA: ¿SERÁ POSIBLE EL SUR?

Ricardo Cantoral Uriza
Departamento de Matemática Educativa – CINVESTAV del IPN

Presentación:

Es para mi un honor compartir con ustedes este espacio y este momento, en esta tan importante y sin duda trascendente reunión, la Relme-11. Que por lo demás lleva, de alguna manera implícita, algo de todos nosotros.

Partamos de la siguiente tesis: la enseñanza en general y la de la matemática en particular son asuntos de la mayor importancia para la sociedad contemporánea. No sólo por cuanto toca a los aspectos eficientistas que otorgan a la educación el estatus de valor agregado a la producción, sino por algo aun más profundo, el lograr que la matemática sea parte de la cultura y en esa misma medida contribuya a formar en la población una visión científica del mundo.

Aunque las preocupaciones por la enseñanza de la matemática y por su mejora progresiva son tan antiguas como la enseñanza misma y ésta tan antigua como la vida de los hombres y las mujeres en sociedad, su estudio sistemático, científico, localizando los fenómenos que la gobiernan cuando se quiere entender de qué manera las situaciones de enseñanza afectan a los actos de aprendizaje en situación escolar, tendrá apenas, si acaso, unos veinte años de existencia entre nosotros. Baste como ejemplo un dato, el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, donde actualmente laboro, se fundó en el año de 1975 en una atmósfera propicia para la investigación. De entonces a la fecha se han formado muchas generaciones de matemáticos educativos, y en ese proceso, la matemática educativa misma se ha ido constituyendo como un campo de investigación autónomo. Quizá en un principio, unos cuantos colegas confiscaban las oportunidades y el quehacer de todos, hoy por el contrario, no es difícil percibir al interior de nuestra pequeña comunidad distintas visiones que están aprendiendo a cohabitar en una sana pluralidad que ve emerger a la nueva escuela de matemática educativa. Esta reunión latinoamericana de matemática educativa es una muestra de cómo se vive, actualmente, un intenso proceso de institucionalización de la disciplina.

Pues bien, desde hace algún tiempo, investigadores del mundo entero se han ocupado de estudiar sistemáticamente algunos de los fenómenos que caracterizan a los actos de enseñanza cuando se pretende que un cierto conjunto de ideas matemáticas sea re - escenificado y recreado por los alumnos y sus maestros, se pretende pues descifrar cuál es su influencia en los actos de aprendizaje y cómo estos sirven al diseño de novedosas situaciones de enseñanza.

Así las cosas, esta conferencia tiene una ambiciosa tarea: presentar una visión general y contemporánea de la filosofía de la matemática educativa en Latinoamérica. Este intento resultará tan solo una visita guiada, concisa y estructurada sobre algunos ejemplos concretos, de una rama del conocimiento científico, de un dominio disciplinar multifacético aun no completamente definido, que hemos dado en llamar: la matemática educativa.

Naturalmente esta tarea no puede resultar neutra. Ella se debe acompañar de una cierto punto de vista dado. Como se podrá descubrir fácilmente, será mi propio punto de vista fruto de 17 años de investigación y desarrollo en este dominio explícitamente desarrollado a lo largo de la charla. Aunque procuraré no ser redundante en ello mi presentación se apoya en tres tesis centrales.

Primero. Una nota de orden epistemológico.

Cada época de la historia de la humanidad produce, mediante sus prácticas sociales cotidianas y su lenguaje, una estructura imaginaria de saberes. La matemática educativa, en tanto dominio del conocimiento, es una sección de tales prácticas sociales, y su textura científica no representa mas que una dimensión de esa estructura imaginaria. Los historiadores y los filósofos modernos después de Alexandre Koyré han mostrado muy bien que la imaginación científica se transforma radicalmente de una época a otra, y que la ciencia es mas una epopeya que un soneto. De modo que la evolución de la matemática educativa merece contarse de mas de una manera.

Lo que en general es menos evidente al respecto, es que esa historia humana de la matemática educativa corresponde a una historia de las teorías del conocimiento en sí misma. Aunque la historia del conocimiento en sí en Latinoamérica está aún por escribirse, es justo sin embargo decir que ha habido en todo momento, en todos los tiempos precursores de eso que, hoy llamamos la matemática educativa, y que han abordado el problema de la cognición y del conocimiento matemático en situación escolar.

El periodo moderno de la matemática educativa representa una modificación sustancial en las historias paralelas del conocimiento, por vez primera, esta ciencia (es decir el conjunto de los científicos quienes definen eso que ellos deben ser) reconoce plenamente su legitimidad en la exploración del conocimiento matemático escolar a todos los niveles y encuentra un mejor lugar entre la psicología, la matemática, y la filosofía. Esta revolución del conocimiento, fue introducida brutalmente en los últimos quince años, de la misma manera que le programa darwiniano había dado lugar al estudio científico de la evolución aunque algunos otros antes de Darwin se habían interesado en esa cuestión.

Segundo. La inevitable naturaleza sociopolítica.

Cualquiera que haya examinado de cerca la evolución de una disciplina científica, habrá descubierto muy pronto que ella transita por distintos momentos y se constituye mas como un mosaico de perspectivas mas o menos compatibles que como un dominio homogéneo. También habrá que decir que, en tanto que actividad social, la ciencia en general, y la matemática educativa en particular, son incesantemente atravesadas por corrientes de poder quiénes dan a través de ciertas de sus voces más autoridad que otras.

Mientras que Europa fue el epicentro de la ciencia justo hasta la época de las guerras, es indiscutible que este rol le corresponde ahora a los Estados Unidos. De hecho, la mayor parte de los europeos y latinoamericanos consideran a los Estados Unidos como la referencia obligada para todo aquello que tiene reputación. En matemática educativa, en cambio, de no ser por la escuela francesa de didáctica de la matemática, y quizá por la escuela alemana y ex soviética con fuertes proyecciones instruccionales en lo que han denominado metodología de los conocimientos específicos, quiénes han logrado constituirse sobre sólidas visiones de escuela, y que han alcanzado un alto prestigio entre diversos sectores académicos latinoamericanos, estaríamos ante la obligada elección unitaria de mirar sólo hacia el norte como nuestra única fuente de conocimiento. Este escenario parece ubicar el quehacer en nuestra disciplina como una triada monolítica de visiones compartidas y simultáneamente negadas: la anglosajona, la europea continental y la ex socialista. No es complicado descubrir de una lectura puntual de los trabajos de investigación de nuestros colegas a cuál de las corrientes se adscriben los latinoamericanos, así como tampoco es complicado entender sus causas.

Ahora bien, ¿cómo mirar hacia el sur? ¿De qué manera encontrar nuestras contribuciones al conocimiento? ¿Cómo escaparse de esta triada teórica que ubica al conocimiento fuera de nuestras fronteras? ¿Cómo descubrir que existe efectivamente una tendencia que bien podríamos llamar la escuela latinoamericana de matemática educativa? ¿Será posible el sur?

Tercera. La visión antropológica: El conocimiento tiene fronteras.

Esta tesis se apoya en las dos anteriores. Dijimos en la primera de nuestras tesis que cada época de la historia de la humanidad produce, mediante sus prácticas sociales cotidianas y su lenguaje, una estructura imaginaria de saberes, en nuestro caso de los llamados saberes didácticos, y señalamos también que la evolución de la matemática educativa, en tanto disciplina científica merece contarse de mas de una manera. En nuestra segunda tesis señalamos que cualquiera que hubiera examinado de cerca la evolución de una disciplina científica, habría descubierto muy pronto que ella transita por distintos momentos y se constituye mas como un mosaico de perspectivas parcialmente compatibles que como un dominio homogéneo. Pues bien, una buena parte de la investigación sobre la historia de la educación ignora las fronteras, de modo que encontraremos citas en todos los trabajos de pedagogía y didáctica de personajes como Platón, Erasmo, Comenius, Rousseau o Dewey. Sin embargo cuando se pretende estudiar el funcionamiento del sistema escolar o precisar los aspectos sociales de la educación, debemos mas bien, para responder a ciertas exigencias metodológicas, limitarnos a un marco nacional o regional determinado, aunque obvio es decirlo, no habremos de descartar las problemáticas comunes a diferentes países o regiones pertenecientes a un mismo conjunto, histórica o geográficamente determinado. En esa medida es que planteamos el estudio de las regularidades de nuestro sistema de enseñanza cuando se pretende perpetuar un saber matemático en nuestra cultura, de ahí que tenga pleno sentido el nombre de la *escuela latinoamericana de matemática educativa*.

Por ejemplo, en el estudio del pasado de los países del llamado Tercer Mundo, algunos historiadores se esfuerzan por precisar lo que fueron las estructuras educacionales durante los periodos que precedieron a la instalación del poder colonial. Otros, los más numerosos, se interesan en el periodo colonial procediendo, sea la confrontación de los países colonizados con la metrópoli correspondiente, sea a un estudio profundo de las funciones cumplidas por la escuela instalada en esos países.

En este sentido se ha estudiado, por ejemplo, el funcionamiento de las escuelas normales de maestros para estudiar la formación y el papel de los docentes "autóctonos". Remitiéndose a las tesis sobre la función de la escuela, se asume que su papel consistió en servir de mediadores culturales entre la potencia colonial y la masa de nativos, en difundir la obra "civilizadora" de la colonia. Con respecto a la organización y al contendido de la formación de los maestros, dos modelos se enfrentan a comienzos del siglo veinte. Por una parte, un modelo segregacionista que consistió en concebir, para los alumnos docentes "autóctonos", una formación más elemental, mas pragmática de la que se dispensa a los alumnos docentes de la metrópoli, residan éstos en uno u otro sitio. Y por la otra, un modelo, asimiliacionista según el cual los dos grupos habrían de recibir una formación común la cual habría de ser impartida en la metrópoli.

Estas tres tesis en su conjunto, me permiten sostener los siguientes puntos:

Matemática Educativa, ¿actividad o disciplina?

En el campo de la Matemática Educativa, nuestro principal problema de investigación ha sido particularmente el siguiente: encontrar las maneras de articular los saberes matemáticos en situación escolar, de forma que logren su aprendizaje la mayoría (>70%) de los estudiantes de una clase. Qué debemos entender por saber matemático y qué por articular los saberes. Qué habrá que entenderse por aprendizaje. Claramente sobre todo ello se puede hacer teorías, basta estar entre epistemólogos para comprobarlo, pero necesitamos algo más funcional, una especie de proto - definición que nos sirva, como las brújulas para los navegantes novatos, para guiarnos. De manera que permítaseme decir que el conocimiento es la información sin uso, en ese sentido el conocimiento es francamente ignorante: por su parte el saber es la acción deliberada para hacer con el conocimiento un objeto útil ante la situación problemática. En este mismo sentido el aprendizaje es una manifestación de la evolución del conocimiento en saber. El aprendizaje consiste pues, en dar la respuesta correcta ante la situación concreta.

Ahora bien, como estamos interesados en hacer una presentación funcional para orientarnos a nosotros mismos y conducirnos en una presentación global. El nombre de *matemática educativa* da a nuestra disciplina una ubicación geográfica y conceptual: digamos que geo - social o antropológica. En el mundo anglosajón, el nombre que le han dado a la actividad equivalente es el de *mathematics education*, mientras que en la Europa continental le han llamado *didactique des mathématiques* o *didaktik der mathematik* por citar algunos de los grupos más dinámicos.

Fuera del medio de los matemáticos educativos, suele creerse que bastan una suficiente cultura matemática y una intuición didáctica adecuada para ser capaces de diseñar currículos, elaborar textos y programas escolares y conducir y evaluar el aprendizaje de nuestros alumnos y el funcionamiento de nuestros sistemas de enseñanza. De enseñar una y otra "novedosa" presentación de los conceptos y procesos matemáticos en el aula, sin sentirse persuadidos de la necesidad de evaluar los efectos de sus "innovaciones" en el aprendizaje de los alumnos.

Al interior de nuestra comunidad por el contrario, cada vez es mas claro que la complejidad de los fenómenos estudiados y los crecientes hallazgos (en espera de su eventual utilización en el enfrentamiento de problemas didácticos) requieren con mayor urgencia de profesionales del campo; investigadores o profesores no solo interesados en los problemas educativos, sino formados para enfrentarlos. En este sentido se ha creído que la maestría en el dominio científico de los contenidos matemáticos - aunque indispensables ¿quién podría dudarlo? - no es suficiente para estudiar y afectar el funcionamiento de los fenómenos didácticos de manera ventajosa.

Finalmente, entremos pues a mostrar algunos de los ejemplos del trabajo que hemos desarrollado en los últimos años. Trataremos dos problemas: el primero acerca de la presentación didáctica del diferencial total de una función de dos variables reales y el segundo sobre la introducción de la regla de L'Hôpital en los cursos de cálculo.

Un matemático-hidrogeólogo desea modificar la enseñanza del cálculo, ¿pero cómo?, Le pregunta a una profesora de matemáticas

Schäfer, Rüdiger, Universidad de Bremen

Balderas Cañas, Patricia E., Universidad Nacional Autónoma de México

Introducción:

El intercambio de ideas que a lo largo de tres años se ha venido realizando sobre la enseñanza del cálculo diferencial e integral (cálculo) en el nivel superior han motivado a los autores a elaborar una propuesta de enseñanza del cálculo que aborde problemas del ámbito profesional y del entorno cotidiano de los estudiantes. En ese sentido el trabajo profesional en el campo de la hidrogeología numérica permite ilustrar el enfoque del cálculo que debiera aprender el alumno de este curso en el nivel superior, y es por eso que a continuación nos referimos a la hidrogeología.

I. Enseñanza del cálculo avanzado y la hidrogeología:

En la enseñanza del cálculo avanzado las ecuaciones de Poisson, Laplace y de calor son ejemplos preferidos para mostrar la manera como se les puede utilizar para la modelación de situaciones en física, ingeniería o hidrogeología teórica. Dicha enseñanza ocurre de dos maneras principalmente, una *formal* y otra *intuitiva*.

Enseñanza *formal*.- En esta modalidad las situaciones físicas se presentan en forma generalizada con el fin de aplicar las leyes generales de la física (conservación de masa y energía, por ejemplo) y los métodos avanzados del cálculo (v.g., ecuaciones en derivadas parciales, integración multidimensional, teoremas de integración), de manera fácil y elegante sin resolver problemas de modelación de situaciones específicas. En este sentido se puede ver, por ejemplo, la discusión de la modelación del flujo de calor en Kreyszig (1990, vol. I, 518).

Enseñanza *intuitiva*.- A diferencia de la enseñanza *formal*, en la enseñanza *intuitiva* se presenta una situación física con todo detalle, respecto a una situación específica. En este caso, las leyes de la física se aplican en la forma más simple posible, expresadas en un idioma cotidiano y por métodos básicos del cálculo (geometría analítica, derivadas como resultados de procesos límite de fracciones de diferencias finitas e integrales de Riemann como resultado de procesos límite de sumas). Sólo, después de esta etapa de modelación se utiliza herramienta más avanzada del cálculo. En esta línea de enseñanza véase por ejemplo el tratamiento de la ecuación de calor en Gutermann (1988, 601).

Ilustramos brevemente las tendencias de enseñanza *formal* e *intuitiva* en una situación hidrogeológica, por los pasos. En el primero, se toman algunas mediciones de la profundidad del agua en pozos a niveles distintos del agua, y nos preguntamos si dichas medidas se deben solamente al azar o tienen una significación más amplia. Para investigar sobre los niveles del agua se necesita introducir un sistema de coordenadas y tomar varias mediciones del nivel del agua en mas pozos. Después, por el método de interpolación se obtienen líneas que representan isolíneas de nivel del agua subterránea. Dibujamos las líneas ortogonales para investigar el flujo de agua subterránea. Esta red es la red hidráulica del flujo subterráneo de agua pero solamente cuando los niveles en los pozos representan potenciales en el sentido de la física. La prueba podría efectuarse perfectamente de manera *intuitiva.*

Se expresa posteriormente la balanza de cambio de masas de agua para un conjunto de celdas finito del subsuelo por (1). Sin explicar todo el manejo simbólico es posible ver una presentación intuitiva que da lugar a una suma de integrales multidimensionales (2). Para cuyo desarrollo se necesita, por primera vez, de algo formal, el teorema de Gauss Ostrogradski, para convertir la suma de integrales en una condición para una integral tridimensional (3). De donde se obtiene la ecuación de continuidad (4). La línea intuitiva es suficiente y apropiada para introducir la ley de movimiento de agua bajo fricción de Darcy (5). Y la densidad modificada $\theta\,\rho$ se usa para adaptar la ecuación de continuidad a la situación del flujo del agua en el subsuelo poroso (6).

(1) $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max_i \{\lvert\Delta t_i\rvert+\lvert\Delta R_i\rvert\}\to 0}} \sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\Delta\left(\rho\vec{v}\right)\cdot\left(\Delta s\cdot\vec{n}_c\right)\right]_i+\left[\frac{\Delta\rho}{\Delta t}\cdot\Delta R\right]_i+\Delta q_i\right\}=0$	
(2) $\iint_S \rho\vec{v}\,d\vec{s}+\iiint_R \frac{\partial\rho}{\partial t}dR+\iiint_R q\,dR=0$	(3) $\iiint_R\left\{div\left(\rho\vec{v}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}+q\right\}dR=0$
(4) $div\,\rho\vec{v}+\frac{\partial\rho}{\partial t}+q=0$, kg/seg/m^3	(5) $\vec{v}=-k_f\,\mathrm{grad}\,h(x,y,z,t)$
(6) $-div\left(\theta\rho k_f\,\mathrm{grad}\,h(x,y,z,t)\right)+\frac{\partial\theta\rho}{\partial t}+q=0$, kg/seg/m^3	

Con unas modificaciones técnicas intuitivas se logra una ecuación en derivadas parciales para modelar el comportamiento de los niveles $h=h(x,y,z,t)$ en los pozos y para utilizar los datos del campo y los métodos numéricos estándares. Los modelos numéricos de este tipo son indispensables para la planificación del manejo de acuíferos y el abastecimiento de aguas potables.

II. Enseñanza apropiada del cálculo y el problema educativo:

El trabajo por años en la hidrogeología (Schäfer) ha dado lugar a plantear algunos requerimientos más urgentes respecto a la enseñanza del cálculo y la física, además de disponer de algunas "herramientas". Respecto a la enseñanza del cálculo lo más urgente es el estudio de la derivada de una función, no sólo como la pendiente de la curva sino como resultado de un proceso límite de una fracción o razón; de la integral de Riemann, no solamente como el área bajo la curva, sino como el resultado del proceso límite de una suma de términos estructurados idénticamente; las ecuaciones diferenciales, no solamente como una molestia, sino como la representación de la superposición de procesos simultáneos; y la presentación formal e intuitiva de las herramientas del cálculo avanzado como gradiente, divergencia, rotacional , e integrales de línea, de superficie y triple, así como los teoremas de integrales.

Lo más básico que se requiere de la física es: observación, experimentación y medición; manejo de datos; formulación de leyes de la física de varias formas (en idioma de cada día, en idioma del cálculo, como resultado de la observación, y como consecuencia de un proceso de verificación); y conocimiento un tanto profundo de una aplicación. Las herramientas más urgentes consisten de: análisis numérico básico; estadística aplicada básica; dominio de un software de graficación en dos y tres dimensiones; y dominio de un software de técnicas numéricas estándares.

Poniendo al tanto de estas ideas a la profesora Balderas, la discusión se dirige ahora hacia el planteamiento de algunas cuestiones sobre la problemática educativa de la enseñanza del cálculo. En primer lugar cabe señalar que el enfoque formal de la enseñanza del cálculo plantea un problema físico en términos formales, en términos matemáticos, y de ahí se busca la aplicación a un problema real, esta situación resulta artificial y muchas veces contraproducente para la construcción de ideas. Y, por otra parte, si nos explicamos la producción e interpretación de las ideas conforme a Kaput (1992, 523), nos percatamos de que la lectura deliberada conduce a la interpretación de las representaciones externas (observables) y que la producción de material escrito puede dar cuenta, de manera, indirecta de la producción de las ideas.

Estos dos aspectos, producción e interpretación de ideas, dan lugar a la pregunta ¿cómo habla el matemático-hidrogeólogo preocupado por la enseñanza del cálculo?. Cuestión que lleva a otra pregunta, sobre cómo es la organización del conocimiento del profesor -considerado como experto- que le permite formular el problema hidrogeológico en varios niveles de codificación, más o menos formales, desde el punto de vista de la matemática. Por ejemplo, para obtener la representación de la situación hidrogeológica mediante una secuencia de distintas representaciones correspondientes a las etapas del estudio de la situación hidrogeológica, se ilustra la proyección de la organización conceptual y representacional del experto en la producción de dicho esquema, con el fin de comunicar ideas. Es decir, dicha pregunta se puede reformular en: ¿cómo está organizado el conocimiento del matemático-hidrogeólogo respecto al problema de modelación de la situación hidrogeológica?

En este trabajo no se tiene como propósito discutir la organización conceptual del experto, pero es preciso dejar sentado que su estudio permitiría identificar los fundamentos (de matemáticas y física) necesarios para la interpretación y producción de ideas. Y una manera de hacerlo seria conforme al Modelo de Análisis Proposicional propuesto por Campos y Gaspar (1996), que para el concepto de cambio se hace en un estudio realizado por Balderas (1996).

Dos preguntas surgen inmediatamente respecto a los requerimientos más urgentes de la enseñanza del cálculo y la física, señalados al inicio de esta sección, una ¿qué dificultades tienen los estudiantes en la comprensión de esos requerimientos?, la otra, ¿cómo proceden los estudiantes en la solución de problemas similares a los del estudio de la situación hidrogeológica, antes de la enseñanza correspondiente? Contestar o dar aproximaciones a las cuestiones anteriores tendría por objetivo recabar elementos para diseñar la enseñanza del cálculo con el propósito de favorecer el movimiento paulatino de la estructura conceptual del alumno hacia la estructura conceptual del experto. Movimiento que debe evaluarse constantemente para redireccionar el diseño didáctico a partir de respuestas sobre ¿qué desempeños del estudiante le indican al experto (matemático-hidrogeólogo o profesor), el tipo de aprendizaje que logra?

III. Experimentos, modelos y matemáticas:

De manera breve la propuesta didáctica "experimentos, modelos y matemáticas" es un taller en el que se intenta mostrar que existen posibilidades de experimentación en el aula de matemáticas sobre fenómenos relacionados con temas básicos de cálculo diferencial e integral.

Se pretende conciliar los puntos de vista experimental y teórico por medio de la modelación matemática, de modo que el aprendizaje del cálculo se apoye en los razonamientos visual y analítico, y para que la información perceptual se conceptualice adecuadamente.

También se quiere proporcionar un modelo para la enseñanza simultánea de la física y la matemática en las condiciones de interacción social que representa el trabajo en el aula, que consiga desestabilizar los procedimientos familiares y las concepciones informales, y lograr que el alumno cambie sus descripciones insuficientes iniciales por unas más apropiadas (Amigues, 1990), en términos físicos y matemáticos.

Las actividades del taller consisten de la realización, análisis y discusión de experimentos sobre balanzas y centros de gravedad, resorte con pesos, péndulo y tiro parabólico; a desarrollarse en siete etapas: experimento y réplica, planteamiento de las leyes de la física correspondientes, obtención del modelo matemático, análisis numérico, programación, sugerencias y aplicaciones, y conclusiones. En otra parte (Balderas y Schäfer, en preparación) se proporciona una programación detallada de las actividades del taller.

Comentarios finales:

La propuesta "experimentos, modelos y matemáticas" se ha puesto en práctica en la ciudad de México, con profesores de matemáticas de los niveles medio superior y superior, que son estudiantes de posgrado en matemática educativa, bajo las modalidades de seminario y de taller. En Bremen, con profesores de matemáticas en formación (taller). Y también, en actividades extracurriculares de un curso introductorio de cálculo, nivel medio superior. En todas esas ocasiones la respuesta de los participantes es muy satisfactoria y se han elaborado algunos productos: exposiciones y elaboración de materiales didácticos por parte de los participantes.

Referencias Bibliográficas:

- **Balderas, P.** (1996). Representación del concepto de cambio en ambientes computacionales. En M. A. Campos y R. Ruiz, *Problemas de acceso al conocimiento y enseñanza de las ciencias*. México, IIMAS, UNAM. ISBN 968-4927-0. pp. 137-158.
- **Campos, M.** y Gaspar, S. (1996). *El modelo de análisis proposicional: un método para el estudio de la organización lógico-conceptual del conocimiento*. En M. A. Campos y R. Ruiz, op. cit., pp. 51-89.
- **Fetter, C.** (1980, 88). *Applied hydrogeology*. Merrill. ISBN 0675208874.
- **Gutermann y Nitecki** (1988). *Differential equations, a first course*. Saunders College Publishers. ISBN 0030096170.
- **Kaput, J.** (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York, NCTM.
- **Kreyszig, E.** (1990). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Vols. I y II, 5a. edición, Limusa. ISBN 5681822162.
- **Stewart, J.** (1995). *Calculus. Early transcendentals*. 3rd. edition. Brooks/Cole Publishing Company. ISBN 0-534-25158-7.

Entendimiento de los conceptos del Análisis y del Cálculo.

Las construcciones mentales como un marco epistemológico[1]

Francisco Cordero Osorio
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Discutimos algunos aspectos sobre el tipo de relaciones de entendimiento cuando consideramos marcos epistemológicos basados en características de naturaleza funcional de la matemática. Las representaciones y sus interacciones con las construcciones mentales son las unidades de análisis usadas para proveer explicaciones.

Introducción:

Presento el entendimiento de los conceptos del análisis y cálculo a través de considerar algunos aspectos sobre las representaciones y sus interacciones con las construcciones mentales. Para ello, sigo el siguiente camino. Primero, hago algunos planteamientos sobre las interacciones entre las representaciones y las construcciones mentales de algunos conceptos del cálculo y análisis. Después, discuto y doy algunos ejemplos acerca de cómo es explicado el entendimiento cuando se toman en cuenta características propias de naturaleza funcional y no estructural de la matemática. Y al final, señalo una perspectiva sobre el papel que juegan las relaciones entre esquema (en tanto pensamiento) y sus restricciones (en tanto conocimiento) en el desarrollo del entendimiento. Cabe aclarar que la noción entendimiento, en nuestra aproximación, aún no esta definida. Solo es usada para articular algunos aspectos de cierta categoría de conocimiento en relación a su funcionamiento. Sin embargo, hemos encontrado aspectos comunes entre las relaciones de entendimiento, nuestras, y los actos de entendimiento de Sierpinska pero hasta ahora no podríamos decir que son las mismas nociones (ver componentes y condiciones de un acto de entendimiento en [**Sierpinska, 1994**]).

Interacciones entre representaciones y construcciones mentales.

Describir el entendimiento de los conceptos del Cálculo no sólo consiste en pensar en una estructura que organiza los conceptos del Cálculo y en buscar evidencias sobre las construcciones mentales que hace el estudiante ante esa estructura. Sino también, es necesario entender la transformación del Cálculo, en tanto conocimiento, cuando es llevado a la escuela. En otras palabras, es necesario considerar los conceptos del Cálculo en su transposición didáctica [**Artigue, 1992**]. Importan los entendimientos de los conceptos en los contextos de los diferentes marcos epistemológicos de los contenidos del Cálculo y los fenómenos en las representaciones entre los diferentes marcos [**Cordero, y Solís, 1995**]. En este sentido, las relaciones

Proyecto de investigación financiado por CONACYT, clave: 3724P-S: Modelización del funcionamiento cognitivo del entendimiento de los conceptos del Análisis y Cálculo a través de las construcciones mentales como un marco epsitemológico.

del entendimiento adquiere características propias de naturaleza funcional y no estructural. Sabemos, sin embargo, que las construcciones mentales caracterizan los niveles de construcción necesarios para alcanzar cierto entendimiento de los conceptos (ver [**Asiala, et al, 1996**]), pero la naturaleza funcional debe de llevar a poner atención en los progresos y restricciones de esas construcciones mentales.

Por ejemplo, el concepto de función en el Cálculo bajo una perspectiva de la transposición didáctica abre un campo más amplio, no basta con mirar a la función como una estructura de relaciones entre dos conjuntos. Si miramos el desarrollo del concepto de función en diferentes marcos epistemológicos y en los fenómenos de las representaciones obtenemos diferentes relaciones del concepto: una función *f(x)* es la expresión o descripción de la variación continua de cierta cantidad, pero también es una fórmula o bien un organizador de comportamientos gráficos. Cada una de estas relaciones, y en conjunto, tienen diferentes representaciones, formas y niveles. Aparecen, también, diferentes planos de representaciones donde se identifican posibles homomorfismos entre ellos. Pero también se identifican los procedimientos operatorios localmente coherentes que se derivan de las representaciones [**Cordero y Solís, 1995**].

Independientemente de la variabilidad de los marcos epistemológicos y de las representaciones las tres relaciones del concepto de función: *variación continua, fórmula y organizador de comportamientos*, debaten entre dos grandes concepciones: una local y la otra global. Y a la vez, transitan entre dos grandes contextos: algebraico y gráfico. Las relaciones entre la variabilidad de las variables y la variación de los coeficientes sintetizan un escenario de argumentaciones del Cálculo, en un sentido funcional, el cual hemos llamado *comportamiento tendencial de las funciones.* Se formulan situaciones para encontrar formas de la gráfica de una función que describen una tendencia a regular un comportamiento en el dominio natural de la función. Y se provee de categorías tales como simulación, transformación, identificación de patrones y estabilidad [**Cordero y Solís, 1997**].

Características de naturaleza funcional de la matemática:

El aspecto funcional enfoca categorías, como las que mencioné en el párrafo anterior, que contrastan con las categorías encontradas en la estructura de la matemática. El contraste radica en los procedimientos que se derivan, por un lado, de las representaciones y, por el otro lado, de las operaciones formales. En ese sentido el comportamiento tendencial de las funciones no consiste en establecer una definición matemática sino más bien establecer o identificar todas las relaciones en el marco de referencia del contenido matemático (herramienta y significado) a través de representaciones y los procedimientos que se derivan de éstas [**Vergnaud, 1990**].

La naturaleza de esas relaciones, necesariamente, pone atención en actos visuales y analíticos los cuales pueden ser explicados a través de procesos y objetos [**Zazkis, et al,1996**]. El aspecto importante aquí, es la relación entre la variación y el comportamiento tendencial, que no es otra cosa sino una relación entre una situación local y global donde hay variación y comportamiento con cierta tendencia. Simultáneamente hay una percepción tanto local como global donde hay una medida de cambio y donde la medida tiene comportamiento.

Entonces, nuestro planteamiento consiste en que una situación gráfica, basada en la naturaleza de las relaciones descritas anteriormente, lleva con más énfasis a la forma de construir los procesos y objetos que a los procesos y objetos en sí. La forma corresponde al funcionamiento cognitivo, esto quiere decir, que la variabilidad de los marcos y la multiplicidad de las representaciones tienen que afectar las formas de construcción. Y para poder determinar cómo son afectadas analizamos los progresos y las restricciones de las construcciones mentales.

La inter-relación del contenido matemático (conceptos locales y globales del Cálculo), las representaciones y los procedimientos son elementos que nos importa ver en una "estructura de desarrollo del entendimiento". Para ello, estamos diseñando situaciones que consideren diferentes tránsitos, o bien, las inter-relaciones de contextos organizados por el comportamiento tendencial de una función: *contexto gráfico y contexto analítico* y *contexto analítico y contexto gráfico.*

Hasta ahora, hemos precisado el siguiente contenido específico que el comportamiento tendencial de la función organiza: traslaciones y cambios de pendientes de las gráficas de las funciones, operación entre funciones y estabilidad de las funciones.

Por ejemplo, las relaciones entre la función derivada y primitiva llevan a situaciones que inter-relacionan diferentes contextos. Por una parte, la gráfica de la derivada f' de acuerdo con la posición de su gráfica en los ejes de coordenadas, provee información sobre la gráfica de la función primitiva f. Pero por otra parte, una vez conocido el comportamiento gráfico de f' y f y al sumar una constante a la derivada f', es decir $f'+a$, tiene sentido preguntarse el nuevo comportamiento gráfico de f. Algunas veces habrá cambio de concavidad de f dependiendo del valor de a y el hecho de que $f'+a\neq 0$, proveerá información especial sobre la función primitiva. Otro ejemplo, es la suma de dos gráficas. Se trata de completar la suma de dos gráficas: "*gráfica de* f"+[?]="*gráfica de* h". La situación lleva a buscar comportamientos tendenciales de las gráficas a través de variar los parámetros o coeficientes de la función y con ello se hacen comparaciones gráficas entre "curvas" y "rectas" a través de la operación suma. El comportamiento tendencial gráfico consiste en que la curva "persigue" la pendiente de la recta considerada en algún sitio especifico de su domino y este hecho define la nueva posición y forma de la "gráfica suma". Y otro ejemplo más es cuando las ecuaciones diferenciales lineales son pensadas como una relación que establece comportamientos entre dos funciones: si $ay'(x)+y(x)=F(x)$ entonces $y(x)$ tiene un comportamiento similar a $F(x)$. Este tipo de situaciones favorecen el uso de argumentos en un sentido funcional **[Cordero y Solís, 1997]**.

Los esquemas y las restricciones en el desarrollo del entendimiento:

Finalizo con una reflexión sobre el papel que juegan o deberán jugar los conceptos esquema y restricción cuando aceptamos variabilidad de los marcos epistemológicos y multiplicidad de representaciones.

Las construcciones mentales están explicadas a través de invariantes, llamados acción, proceso, objeto y esquema (ver por ejemplo [**Asiala, et al, 1996**] y [**Clark, et al, 1997**]). Esto quiere decir que independientemente de que hay una variabilidad de marcos siempre se construirán acciones, procesos, objetos y esquemas. Sin embargo, la variabilidad de los marcos epistemológicos y la multiplicidad de representaciones enfocan las formas de construcción de estos invariantes. Bajo esta perspectiva importan las construcciones mentales no por ser invariantes sino como la evolución adaptativa de un conocimiento en una situación. "La evolución adaptativa" y "el conocimiento en una situación" ponen en juego aspectos globales del pensamiento y el conocimiento. Es el *esquema* el aspecto global del pensamiento y es la *restricción* el aspecto global del conocimiento, es decir, el *esquema* y la *restricción* son relaciones del pensamiento y conocimiento en tanto que la situación es el recorte o restricción del esquema. Siendo así, no veríamos la construcción del esquema sino más bien el desarrollo del esquema ante distintas situaciones para explicar un desarrollo del entendimiento **[Clark, et al, 1997]** y **[Vergnaud, 1990]**.

Por último, "las construcciones mentales como un marco epistemológico" significa que las construcciones mentales son afectadas por la posición epistemológica.

Referencias Bibliográficas:

- ***Artigue, M.*** (1992). "The importance and limits of epistemological work indications". In W. Geeslin & Graham (Eds.) *Sixteenth Psychology of Mathematics Education, 3* , pp.195-216. Durham, NH.
- ***Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K.*** (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education II, 1-32.*
- ***Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. St. John. D., Vidakovic, D. & Tollas, G.*** (1997). Constructing a Schema. The Case of the Chain Rule. 30 pages. *The Journal of Mathematical Behavior*, (Aceptado. Se publicará en Noviembre de 1997)
- ***Cordero, F. y Solís, M.*** (1997). Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo. *Serie: Cuadernos de Didáctica*. Grupo Editorial Iberoamérica. 2a. Edición. 79 págs. ISBN 970-625-140-5. (1000 ejemplares)
- ***Cordero, F. y Solís, M.*** (1995). Las Representaciones gráficas como elementos de Didáctica del Cálculo. *Memorias de la IX Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. Centro de Convenciones del ICE del Ministerio de Educación de Cuba. La Habana, Cuba, 14-17 de agosto. pp. 431-436, Vol.
- ***Sierpinska, A.*** (1994). *Understanding in Mathematics*. Studies in Mathematics Education Series: 2. The Flamer Press.

Modelos matemáticos para todos los niveles.

Simón Mochón
Departamento de matemática educativa, Cinvestav-IPN, México

Introducción:

El objetivo de este curso es mostrar como se pueden construir modelos matemáticos con herramientas muy sencillas y la utilidad que tiene esta actividad dentro de la enseñanza de las matemáticas y otras ciencias.

A grandes rasgos, un modelo matemático es una representación de un fenómeno real, basada en relaciones matemáticas. Estas pueden estar dadas en forma numérica, gráfica o simbólica. El acercamiento que seguiremos en los ejemplos que presentaremos es esencialmente el numérico.

Los modelos matemáticos ayudan a entender mejor los fenómenos que describen, desarrollando nuestra intuición sobre su funcionamiento. Además, nos sirven para predecir lo que pasaría en la situación real. Sin embargo, aquí los usaremos más como una estrategia de enseñanza de algunos conceptos matemáticos y científicos.

Debido a la complejidad de los fenómenos de la naturaleza, casi siempre, al construir un modelo matemático, se tienen que hacer simplificaciones que hacen que esta imagen matemática sea una aproximación a la realidad que trata de reproducir. Por lo mismo, hay que distinguir claramente entre el modelo como representación y la realidad misma y tener presente este carácter aproximativo de los modelos.

Modelos exponenciales (enfoque numérico - gráfico):

Muchos fenómenos como el crecimiento de poblaciones o el decaimiento radioactivo tienen un comportamiento exponencial. Además, los modelos exponenciales son valiosos porque son la base sobre la cual se pueden construir modelos más complejos.

<u>Crecimiento poblacional</u>: En un periódico apareció la noticia de que el censo realizado en 1995 en la República Mexicana registró 93 millones de habitantes, lo cual representa una ganancia de 10 millones de habitantes desde el año de 1990. ¿Cuál será entonces su tasa neta de crecimiento?

La tabla siguiente fue generada con una tasa de crecimiento del 2% anual (este incremento es calculado multiplicando el valor de la población por 1.02 para obtener el siguiente).

Año	Población (millones)
1990	83
1991	84.7
1992	86.4
1993	88.1
1994	89.8
1995	91.6

Se observa que para un 2% de incremento, no se llega a los 93 millones en 1995. Se sugiere tratar otros valores de la tasa de crecimiento anual y trazar la gráfica de los resultados hasta el año 2025.

Modelos exponenciales (fórmulas recursivas):

Podemos introducir un lenguaje matemático que nos ayude a escribir de manera más sintética y general los procedimientos de cálculo que realizamos. Para el ejemplo del crecimiento de la Población Mexicana, suponiendo una tasa de crecimiento del 2% anual, podríamos escribir:

$P_{siguiente} = P_{actual} + 0.02\, P_{actual}$ o $P_{siguiente} = 1.02\, P_{actual}$

"La Población en el año siguiente es igual a la Población actual más el 2% de su cantidad actual debido a su crecimiento" (la segunda relación representa precisamente el procedimiento que estabamos siguiendo).

Por ejemplo, para una cuenta de banco que da un 15% de interés anual, podríamos escribir:

$C_{siguiente} = C_{actual} + 0.15\, C_{actual}$

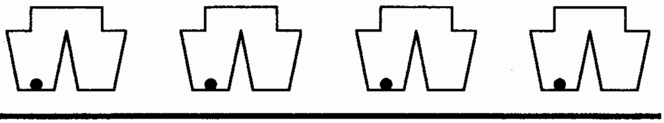
Modelos más complejos (enfoque numérico - gráfico):

Muchos modelos cuyas fórmulas completas resultarían muy complicadas, pueden ser construidos con un enfoque numérico. La ventaja de éste es que organiza las variables en columnas, así que sólo las relaciones entre ellas tienen que ser representadas.

<u>Reacciones químicas reversibles</u>: Podemos construir un modelo de situaciones en las que de manera simultánea un compuesto A se pueda transformar en otro compuesto B y viceversa

($A \rightleftarrows B$).

Imaginemos una superficie con 10,000 recipientes cerrados, de dos secciones, cada uno con una pelota en su parte izquierda, como los mostrados en la figura siguiente:



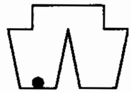
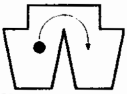
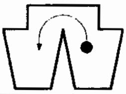
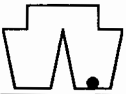
Supongamos que la superficie se agita de tal manera que el 10% de las pelotas pasan a la sección de la derecha. Habrán entonces 9,000 recipientes con pelota en la parte izquierda y 1,000 con pelota en la parte derecha.

Pensemos ahora que la superficie se agita nuevamente de tal manera que el 10% de las pelotas en la izquierda pasan a la derecha pero que también el 10% de las pelotas en la derecha pasan a la izquierda. El número de pelotas que pasan de izquierda a derecha será de 900 (10% de 9,000) y el número de pelotas que pasan de derecha a izquierda será de 100 (10% de 1,000). Así,:

Número de recipientes con pelota en la sección izquierda = 9,000 - 900 + 100 = 8,200

Número de recipientes con pelota en la sección derecha = 1,000 + 900 - 100 = 1,800

Podemos organizar esta información y los cálculos realizados en una tabla como la que sigue (siguiendo el mismo procedimiento se pueden obtener los valores para la 3era, 4ta y demás sacudidas):

Tiempo	Número de recipientes con pelota a la izquierda	Número de pelotas que pasan de izquierda a derecha	Número de pelotas que pasan de derecha a izquierda	Número de recipientes con pelota a la derecha
Número de sacudidas				
Inicio:	10,000			0
1	9,000	1,000	0	1,000
2	8,200	900	100	1,800
3	7,560	820	180	2,440
4	7,048	756	244	2,952
...	...	...	...	...
8	5,839	605	395	4,161
9	5,671	584	416	4,329
10	5,537	587	433	4,463

Se observa que el número de recipientes con pelota a la izquierda decrece y que el número de recipientes con pelota a la derecha aumenta. Se pueden continuar los cálculos (preferentemente con una hoja electrónica de cálculo) para llegar a un estado de estabilización de las variables. Este puede interpretarse en química como el llamado "equilibrio dinámico".

Modelos más complejos (fórmulas recursivas):

Las fórmulas son también de utilidad, especialmente cuando las relaciones entre las variables se vuelven largas y difíciles de recordar. Las fórmulas que representan estos procesos nos ayudan a poner estos procedimientos numéricos dentro de un marco simbólico sintético cuyo seguimiento es automático.

<u>Una extensión al modelo de conejos de Fibonacci</u>: Leonardo Fibonacci en el siglo XIII, estudió un problema sobre la cría de conejos. Sus hipótesis fueron las siguientes: a) se tiene inicialmente una pareja de bebés, b) un bebé tarda 1 mes en ser adulto, c) cada pareja de adultos tiene una pareja de bebés cada mes y d) no hay mortalidad.

Nuestro objetivo es describir y extender la situación anterior. Primero dividimos la población en dos grupos: el de bebés y el de adultos. La siguiente tabla muestra estas cantidades:

Tiempo (meses)	Parejas bebés	Parejas adultas
0 (inicio)	1	0
1	0	1
2	1	1
3	1	2
4	2	3
5	3	5
6	*5*	*8*

¿Cómo representaríamos con fórmulas el proceso seguido en la tabla anterior? Si llamamos B a la cantidad de bebés y A a la cantidad de adultos, tendremos que:

$B_{siguiente} = A_{actual}$ y $A_{siguiente} = A_{actual} + B_{actual}$

Si ahora queremos describir la situación en la que cada pareja de adultos tenga en promedio 3 parejas de bebés cada mes, las ecuaciones cambiarían a:

$B_{siguiente} = 3\ A_{actual}$ y $A_{siguiente} = A_{actual} + B_{actual}$

Si quisiéramos incluir las tasas de mortalidad de bebés y adultos, por ejemplo, el 10% para bebés y el 20% para adultos, éstas se podrían representar como:

$B_{siguiente} = 3\ A_{actual}$ y $A_{siguiente} = A_{actual} - 0.2\ A_{actual} + B_{actual} - 0.1\ B_{actual}$

Es claro que los coeficientes que aparecen en las ecuaciones anteriores (el 3, el 0.2 y el 0.1) pueden cambiarse para analizar otros casos. Aún cuando es posible un trabajo utilizando tablas, este resulta difícil de seguir.

Conclusiones:

Debido al corto espacio disponible, la presentación de los modelos en este reporte fue un tanto alejada de la intención del curso, que es la de usar este tipo de modelos para la instrucción de las matemáticas y las ciencias. El lector tiene que extraer de este escrito entonces las ventajas de usar un acercamiento de modelación en el salón de clase.

Los tres mensajes más importantes de este curso son:

La matemática necesita de contextos reales para darle significado y así entenderla mejor. Entre las muchas habilidades matemáticas que se pueden desarrollar con este enfoque están: el uso de porcentajes, el desarrollo de funciones, la lectura de gráficas, práctica en cálculos numéricos, etcétera.

Debido a la introducción de nuevas tecnologías en el aula, los procedimientos numéricos y el uso e interpretación de gráficas están adquiriendo más valor. Este cambio debe reflejarse también en el salón de clase.

La recursividad es un proceso muy importante dentro de las matemáticas y sus aplicaciones y por lo cual se le debe dar mayor énfasis en el aula.

Resultados preliminares de la investigacion: "La argumentacion en la construccion del conocimiento matematico"*

Olga Lucia Leon C.
Dora Ines Calderon
(Investigadoras principales del proyecto)

Resumen: El presente estudio tiene como propósito realizar una exploración de los recursos argumentativos que emplea un grupo de 12 estudiantes de primer semestre universitario, durante la solución de problemas matemáticos. El modelo de investigación es el etnográfico. En nuestro caso, es un modelo investigativo informado teóricamente que establece una relación entre categorías discursivas y cognitivas para el análisis de la relación argumentación y validación de soluciones a problemas de los campos geométrico, lógico y numérico.

Aspectos teóricos:

Según Perelman et. al. (1989), argumentar es *"convencer o persuadir, en forma razonada, a otro de las tesis que se tienen por ciertas"*. La argumentación como práctica comunicativa se sustenta en tres principios fundamentales: el carácter dialógico con fines convincentes de sus interacciones verbales; el carácter razonable y razonado de sus procesos discursivos; y el nivel de convicción personal frente a lo argumentado.

La función de la argumentación como proceso discursivo, en la solución de problemas está en la confrontación de representaciones y soluciones y junto con ello, la manifestación de concepciones en los ámbitos matemático, social, ideológico, afectivo, etc.. Además, se produce con un fin específico: solucionar satisfactoriamente (eliminando al máximo ambigüedades) un problema matemático. Esta situación de validación exige a cada uno de los interlocutores:

1. Un grado de apropiación mínimo del proceso de solución.
2. La construcción de una forma adecuada de presentación del proceso, con el propósito de convencer a un auditorio.
3. Una actitud flexible de análisis frente a otras soluciones.
4. Una reestructuración de procesos realizados y de formas de presentación de los mismos en términos de consolidar la solución satisfactoria.

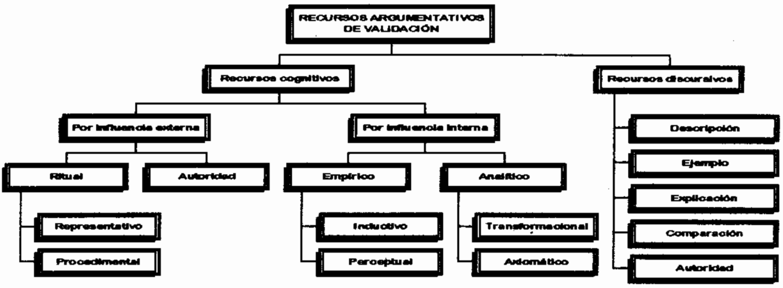
En la dinámica argumentativa los resultados de la interacción pueden tomar dos rumbos: la adhesión por persuasión o por convicción, y el consecuente logro de acuerdos, que en el ámbito de la argumentación en matemáticas adquiere el carácter de validación; o, la contra - argumentación por desacuerdos frente a los argumentos presentados, que en la argumentación en matemáticas adquiere el carácter de refutación. La relación manifiesta entre los procesos discursivos y cognitivos hace necesario partir de una

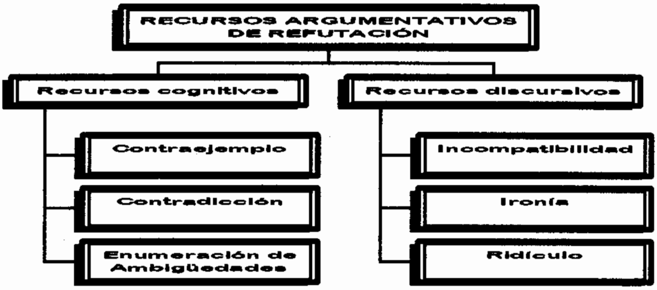
* Esta investigación se desarrolló con el apoyo financiero de Colciencias - BID y la Universidad Externado de Colombia.

tipología de recursos tanto de orden cognitivo como de orden discursivo, propios de los procesos de validación y de los procesos de refutación.

Categorias cognitivas y discursivas de la investigación

CATEGORÍAS DE ANÁLISIS





La fundamentación cognitiva de las soluciones de problemas matemáticos, se ha determinado por la identificación de recursos cognitivos empleados por los estudiantes para resolver problemas. Llamaremos recurso cognitivo al sistema conformado por procesos, conceptos, registros y representaciones matemáticas que se manifiesta como "garante" de la validez de procesos, en la exposición de la solución de un problema. Para ello, hemos establecido dos niveles de sistematización de los argumentos de una solución : a) recursos por convicción interna y b) recursos por convicción externa. Estos niveles se toman de la propuesta de Harel y Sowder (1996).

Llamaremos recurso discursivo a la manifestación verbal privilegiada para exteriorizar y evidenciar concepciones y procesos acerca de un tópico determinado; en este caso de saberes matemáticos. Las categorías discursivas para el análisis están determinadas por tres aspectos de orden lingüístico: a) la forma discursiva, b) el significado del enunciado y c) la función del enunciado.

Primeros resultados:

El siguiente cuadro visualiza el análisis realizado al proceso desarrollado por cada pareja. Este proceso consta de tres etapas correspondientes a la estructura de la interacción argumentativa: presentación de premisas (sistematización matemática inicial de los argumentos), exigencia de garantes (negociación de los argumentos, mediante la exposición de recursos argumentativos de transición) y elaboración de conclusiones (sistematización matemática final de los argumentos).

RECURSOS	COGNITIVOS		DISCURSIVOS
	Influencia externa	Influencia interna	
INICIALES	• Ritual procesual	• Empírico perceptual	• Descripción • Explicación
EN TRANSICION • De validación • De refutación	• Autoridad	• Empírico inductivo • Empírico perceptual • Enumeración de ambigüedades	• Autoridad • Ejemplo • Comparación • Explicación • Incompatibilidad
FINALES		• Empírico perceptual • Empírico perceptual hacia analítico	• Descriptivo • Comparativo • Explicativo

REGISTRO DE METODOS IDENTIFICADOS POR LOS ESTUDIANTES	
METODOS	USO DEL METODO
• Lógico	Solución por descarte de incompatibilidades.
• Tanteo	Solución por descarte de opciones, mediante análisis de casos.
• Manual	Solución en la que no se emplean fórmulas.
• Empírico	Solución en la que no se emplean fórmulas ni conceptos formales.

Conclusiones:

1. La diversidad o ausencia de soluciones, en el trabajo de pareja, determina el esquema argumentativo, elaborado por los estudiantes. Por ejemplo: si se obtienen soluciones similares, se privilegia el desarrollo de procesos de validación, manifestándose el uso de recursos discursivos explicativos y conclusiones por adhesión. Por ejemplo, en el siguiente diálogo:

B: Lo que yo hice fue dividir el número de columnas en nueve... ¿por qué en nueve? porque yo empecé a hallar como una secuencia, como una razón... ¿Entonces qué pasa? Yo necesito hallar dónde está el ciento tres ¿sí? Yo tengo el número, tengo la razón y necesito hallar P. Entonces yo el número lo divido en la razón para saber dónde más o menos me queda, pero entonces resulta, pasa y acontece que la división resulta inexacta, ¿sí? O sea que entonces el residuo es lo que me dice ciento tres va a estar en la siguiente fila, en la columna cuarta.

A: "El proceso en sí básicamente es el mismo, pero en el mío no tengo nada de fórmulas, entonces yo miro, yo pruebo, a ver si cumple la regla... entonces comienzo a sumar hasta que me da".

B: Pero no aplicas ninguna fórmula

A: No..., Hasta que saliera una deficiencia, es que si son números muy grandes, entonces es difícil ponerse a seguir sumando.

B: Entonces como una fórmula para resolver el ejercicio, no importa el número de columnas o de filas.

A: Mejoras del proceso: el que presento yo: la fórmula.

B: Entonces en la fórmula se puede encontrar cualquier dato pedido despejando dicho dato.

Además de la adhesión a una solución, se hace evidente el desarrollo del recurso del tipo empírico perceptual como garantía de una solución más efectiva. Por otra parte, el uso del recurso explicativo se corresponde con la manifestación de recursos cognitivos de influencia interna, en contraste con los recursos rituales relacionados con el uso de recursos descriptivos, hecho que evidencia la escasa convicción acerca de las relaciones matemáticas establecidas.

2. Los registros de métodos empleados por los estudiantes y definidos por ellos, manifiestan concepciones acerca de las exigencias de los procesos matemáticos.

"La deficiencia que encontramos es que no estamos empleando el método matemático empírico, lo que hicimos fue utilizar un método lógico".

Cuando un estudiante considera haber empleado procesos "más matemáticos", los denomina *método matemáticos empíricos y* de *tanteo* y los considera más "válidos" tanto para solucionar el problema como para convencer a los demás (compañeros o profesor). Cuando por el contrario, considera haber hecho procesos no matemáticos se refiere a métodos como el *manual o el lógico*, y, como consecuencia, menos "valederos" para la respuesta pedida por el problema y para convencer al auditorio. En general, los estudiantes manifiestan una tendencia al reconocimiento de la autoridad de las fórmulas en los esquemas procedimentales y representacionales de soluciones de problemas matemáticos.

Finalmente, el hecho de que los estudiantes identifiquen los métodos que emplean permite reconocer, al docente o al investigador dos aspectos de gran interés: el carácter metacognitivo de sus propios procesos argumentativos, es decir, la conciencia de sus procesos para formular mejor sus argumentos; y, las concepciones que ellos tienen acerca de procedimientos matemáticos y de la validez y autoridad de tales procedimientos para optimizar sus argumentos.

Referencias Bibiográficas:

- **Arsac, G.** (1988). "Les recherches actualles sur l'aprentissage de la demostration les phénomenes de validation en France". En: *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 9, No 3, (pp. 247-280).

La instrucción universitaria en ciencias y el pensamiento lógico formal

1-El pensamiento lógico formal después de un año de estudios universitarios en ciencias

Galindo S. G. de, García P. V. de, Morán J A. de
Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia
Universidad Nacional de Tucumán. Argentina

Resumen: En alumnos de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia de la Universidad Nacional de Tucumán se intentó evaluar la posible evolución de ciertas habilidades del pensamiento lógico formal después de un año de instrucción universitaria en ciencias.

Se tomaron en forma sistemática, en distintas etapas, dos muestras aleatorias: una de alumnos de primer año que finalizaban el segundo cuatrimestre (año1995) y otra de alumnos ingresantes a la Facultad (año 1996).

Ambos grupos de estudiantes resolvieron un test estandarizado escrito cuyos ítems se diseñaron para medir el nivel alcanzado en cada una de las operaciones lógicas descriptas por Piaget e Inhelder.

Se utilizaron distintos indicadores: la media de los puntajes obtenidos en los items correspondientes a cada tipo de razonamiento, como indicador del desarrollo logrado en el mismo, y la media de los indicadores de cada tipo de operación lógica, como indicador del desarrollo logrado en el pensamiento lógico formal.

Efectuando un test T de comparación de medias con un nivel de significación del 0,05, se comprobó que existiría una diferencia significativa entre los indicadores del desarrollo logrado en el pensamiento lógico formal entre alumnos ingresantes y los que finalizaban primer año.

Introducción: Muchos ingresantes a la universidad están mal preparados para los desafíos intelectuales que la experiencia universitaria les presenta, siendo incapaces de encarar tareas que involucren al pensamiento abstracto o en términos Piagetianos, al pensamiento de las operaciones formales. Según la Teoría Piagetiana de las Operaciones Formales (Inhelder y Piaget, 1955) los distintos esquemas de razonamiento se adquieren a partir de los 11 o 12 años aproximadamente y se consolidan hacia los 14 o 15 . La teoría de Piaget ha tenido una destacable influencia en desarrollos curriculares y en la enseñanza de las ciencias. Sin embargo, los avances de la psicología en el área de la comprensión y el aprendizaje han evidenciado las limitaciones de esta teoría, y han supuesto un rechazo a los modelos formales de razonamiento (Carretero y García Madruga, 1984). Por otra parte, el estudiante no siempre es capaz de aplicar a cualquier situación todos los tipos de operaciones formales requeridas.

Para el profesor de ciencias, se plantea el siguiente interrogante: ¿influyen sobre el desarrollo del pensamiento formal las actividades que el alumno realiza durante la instrucción en ciencias?

Las opiniones al respecto son muy controvertidas. Algunos autores (Emery, 1973 y Lawson,1975) afirman que la instrucción en el ámbito de las ciencias tiene poco efecto sobre ciertas habilidades del pensamiento lógico; sin embargo, otros (Linn y Their, 1975) opinan lo contrario.

En el presente trabajo se intenta brindar respuesta a tal interrogante, la que podría ser de utilidad docente por las posibles implicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Metodología: El método ideal para determinar el nivel de pensamiento lógico formal de un individuo, requiere entrevistas individuales con personal especializado. Sin embargo, dado que, para obtener resultados válidos la evaluación debe ser realizada para todos los alumnos del grupo en la misma etapa del aprendizaje, dicha técnica no era viable en nuestras condiciones de investigación. Por tal motivo, se utilizó un test estandarizado escrito con diez problemas, que se aplicó en forma grupal a dos muestras aleatorias: una de treinta y tres alumnos que finalizaban el segundo cuatrimestre de primer año (año 1995) y otra de cuarenta y seis ingresantes a la Facultad (año 1996). Se eligieron las muestras de esta manera porque no se consideró conveniente repetir la aplicación del instrumento al mismo grupo y se supuso que el perfil medio de los ingresantes de los años 1995 y 1996 era similar.

Los alumnos del primer grupo habían cursado dos materias de cada una de las disciplinas: Matemática, Física y Química. Los alumnos del segundo grupo sólo habían realizado un curso de ingreso de ocho clases de cada una de esas asignaturas.

El test constaba de diez ítems elaborado para proporcionar información sobre las siguientes operaciones lógicas descriptas por Piaget e Inhelder: Razonamiento Proporcional, Combinatorio, Probabilístico, Condicional, Variables controladas y Aplicación de una Regla universal. Antes de la aplicación del test, se explicó a los alumnos sus objetivos, aclarando que el resultado del mismo no influiría en las calificaciones de las materias de primer año.

Indicadores: A cada ítem resuelto correctamente se le asignó el valor de un punto. Para cada alumno se calculó **un indicador del desarrollo logrado en cada tipo de razonamiento**, como el promedio de los puntajes obtenidos en los items correspondientes; y **un indicador del desarrollo del pensamiento lógico formal,** como el promedio de los indicadores de cada tipo de razonamiento. Se consideró que **el alumno habría alcanzado un desarrollo aceptable en cada tipo de operación lógica** cuando el indicador correspondiente fuera mayor o igual que 0,60. **Se aplicó el mismo criterio respecto al indicador del pensamiento lógico.**

Para ambas muestras, se calculó el porcentaje de alumnos que habrían logrado un desarrollo aceptable para cada tipo de razonamiento y para el pensamiento lógico.

Se hizo un test T de comparación de medias, con un nivel del 5%, para estudiar la eventual existencia de diferencias significativas en cada tipo de razonamiento, y entre las medias del pensamiento lógico de ambos grupos.

Resultados:

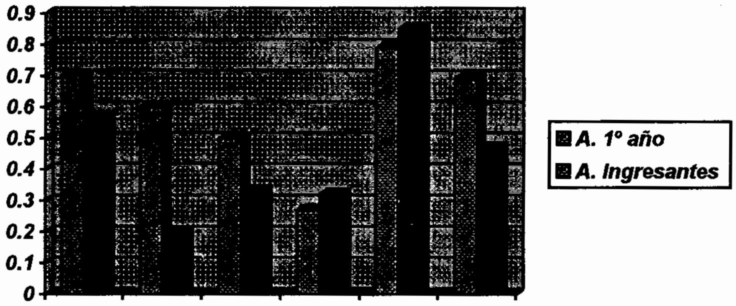
Porcentaje muestral de alumnos que alcanzaron un nivel aceptable en el pensamiento lógico formal

Muestra de alumnos de primer año	51%
Muestra de alummnos ingresantes	35%

Media muestral del indicador del pensamiento lógico formal

Muestra de alumnos de primer año	0,63
Muestra de alumnos ingresantes	0,45

Mediante un test T de comparación de medias con un nivel del 0,05, se concluyó que **existiría entre ambos grupos, diferencia significativa entre las medias del pensamiento lógico.**



Propor- cional Combi- natorio Probabi- lístico Condi- cional Variables controladas Regla Universal

Puntaje muestral medio obtenido para cada tipo de operación lógica

	Razonamiento proporcional	Razonamiento combinatorio	Razonamiento probabilístico	Razonamiento condicional	Variables controladas	Regla universal
Muestra de alumnos de primer año	0,70	0,60	0,50	0,27	0,79	0,69
Muestra de alumnos ingresantes	0,57	0,19	0,33	0,32	0,85	0,47

Mediante un Test T de comparación de medias con un nivel del 0,05 de significación, se concluyó que existirían entre ambos grupos diferencias significativas entre las medias de los razonamientos combinatorio, probabilístico y regla universal.

Conclusiones:

¿A qué factores podemos atribuir las diferencias significativas obtenidas entre ambos grupos, en el pensamiento lógico formal y en los Razonamientos Combinatorio, Probabilístico y Regla Universal?

La diferencia significativa entre las medias del pensamiento lógico formal de alumnos ingresantes y de primer año, podría atribuirse a:

- mejoras alcanzadas en el nivel de pensamiento relacionadas con la instrucción universitaria de primer año,
- deserción de estudiantes que tendrían fallas en ciertas habilidades del pensamiento formal, lo que dificultaba la comprensión de las disciplinas científicas.

Las diferencias significativas obtenidas entre las medias de ambos grupos para los Razonamientos Combinatorio, Probabilístico y Regla universal, podrían atribuirse a la reiterada ejercitación de estas operaciones lógicas, por parte de los estudiantes de primer año, en tópicos de Cálculo Combinatorio,Termodinámica Estadística, Interpretación de datos gráficos, Deducción de las propiedades físicas y fisicoquímicas de un elemento y sus componentes de acuerdo a su ubicación en la tabla periódica y Relación entre la estructura molecular y propiedades físicas.

Para los razonamientos Proporcional, Condicional y Variables Controladas no se obtuvieron diferencias significativas a pesar de haber sido ejercitados en el estudio de la Función de Proporcionalidad Directa e Inversa, Trigonometría, Números Complejos, Estequiometría, Soluciones, Demostraciones de Teoremas, Gráfico de curvas fijando parámetros, etc.

Esto nos llevaría a pensar que hay estudiantes que resuelven tareas que requieren del pensamiento proporcional utilizando estrategias simplificadoras basadas en reglas simples. Con respecto al Razonamiento Condicional concluimos que después del cursado de un año universitario los alumnos no experimentarían ningún progreso. En general, ingresantes y alumnos de primer año, realizan en forma aceptable tareas que requieren del control de variables.

Propuestas: Sobre la base de los resultados obtenidos, pueden proponerse algunas estrategias para estimular el pensamiento formal de los estudiantes:

a) No basar la enseñanza de los problemas sólo en la resolución de ejercicios tipos, para que el estudiante no eluda la real comprensión del proceso que conduce a la solución.

b) Por el mismo motivo, es conveniente evitar el uso exclusivo de reglas o algoritmos, al resolver problemas en los que se ejercita el razonamiento proporcional.

c) Incluir en algunos problemas datos adicionales irrelevantes, que induzcan a un detallado análisis de la situación y a la elección de los datos verdaderamente significativos.

d) Proponer "problemas abiertos" que no tengan solución única para favorecer la flexibilidad de criterios.

e) Inducir al alumno a analizar los resultados obtenidos al resolver un problema, seleccionando los que sean coherentes con el planteo inicial de la situación.

f) Tender a incluir tópicos de Lógica Matemática.

Queda abierta la posibilidad de estudiar las correlaciones que podrían existir entre rendimiento académico y pensamiento lógico formal de los alumnos.

Referencias Bibliográficas:

- **Inhelder, B. y Piaget, J.** (1955). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires. Argentina. Editorial Paidós.
- **Emery, J**. (1973). The status of certain probabilility concepts and combinatorial abilities of high school biology students and the effect of genetics instruction on these cognitive characteristics. *Disertation Abstracts*, Vol A, pag. 3133.
- **Lawson, A. y Renner, J.** (1975). Relationship of Science Subject Matter and Development Levels of Learners. *Journal of Research in Sciencie Teaching*, Vol 12, pag. 347.
- **Linn, M. y Their, H.** (1975). The effect of Experiential Science on Development of Logical Thinking in Children. *Journal of Research in Sciencie Teaching*, Vol 12, pag. 49.
- **Carretero, M., y Garcia, J.** (1984). *Lecturas de psicología del pensamiento*. Madrid Alianza Editorial.

Algunas reflexiones sobre la resolución de problemas

Víctor Martínez Luaces
Facultad de Química
Montevideo, Uruguay

Introducción:

La presente comunicación trata sobre la enseñanza de las matemáticas como asignatura de servicio. Si bien está basada en experiencias concretas en el nivel universitario, se entiende que muchas de las conclusiones son en principio extrapolables a los cursos de los años terminales de secundaria.

La idea central es enseñar planteando problemas y que los estudiantes aprendan resolviéndolos, es decir , se busca resaltar el carácter experimental de la matemática. Este propósito puede ser llevado a cabo tomando problemas vinculados a otras ciencias. Tal es el caso de varias experiencias que se han realizado en diversas dependencias de la Universidad de la República, en las cuales se basa este trabajo.

Se ha escrito mucho sobre la resolución de problemas [1], [2], [3], desde el punto de vista teórico. Por ejemplo Claude Gaulin dice que se puede enseñar para la resolución de problemas , a través de la resolución de problemas o sobre cómo resolver problemas [4]. En nuestro caso, como lo sugiere el propio Gaulin, hemos tratado de integrar los tres objetivos.

Esta forma de enseñar, obviamente demanda un tiempo mayor y esto puede llevar a dar menos temas. Esta posibilidad la analiza Schoenfeld, según el cual "no se cubre toda la materia, pero se descubre mucho sobre ella" [1]. El no llegar a cubrir todo el programa no es la única dificultad. En efecto, al permitirle a los alumnos tomar los caminos propios, aumenta enormemente la posibilidad de que el docente se equivoque , e incluso "quedar en blanco", lo que es mucho más difícil que ocurra en una clase magistral, si la exposición fue adecuadamente preparada. Estas equivocaciones deben ser asumidas con honestidad y se deben plantear claramente a los estudiantes como parte del proceso del descubrimiento.

Sin embargo, existen virtudes que compensan con creces las dificultades antes mencionadas: a) una mayor motivación del estudiantado, b) una mayor utilidad al aproximarse a lo que el futuro egresado deberá hacer en su vida profesional y c) el pacer que provocará en los estudiantes y en el propio docente. En efecto, el docente según esta concepción sentirá el placer de provocar el pacer de descubrir en sus alumnos [5].

Algunas experiencias concretas:

Todos los docentes a nivel universitario y probablemente muchos de los que trabajan en otros niveles, deben haberse encontrado con la "temida e impertinente" pregunta ¿y esto par qué sirve? que con frecuencia interrumpe la belleza de una perfecta exposición matemática. la pregunta en realidad es perfectamente pertinente para un estudiante que no quiere ser matemático sino ingeniero, economista, químico o sociólogo, entre otras posibilidades. A este estudiante no le interesa producir futuros teoremas, sino entenderlos, interpretarlos y utilizarlos. De acuerdo con estos objetivos, para el docente no debería ser lo fundamental la notación, el rigor, o cualquier elemento formal, sino la visualización, la comprensión y la verbalización de los conceptos por parte de los alumnos.

La pregunta antes mencionada no tendría razón de ser si las distintas materias no funcionaran como compartimientos estancos. Cabría preguntarse entonces a qué se debe este tipo de funcionamiento tan generalizado como inadecuado.

Una posible explicación proviene de la propia formación de los docentes matemática. En efecto estos últimos no suelen tener una formación importante de física, química o biología y en general desdeñan este tipo de materias. Un ejemplo interesante de lo anterior es lo que sucede en Uruguay, con los estudiantes de la licenciatura de matemáticas: de acuerdo con el plan vigente, estos estudiantes deben, paralelamente a los cursos de matemática cursar otra asignaturas (en la jerga local se les denomina "las materias B" con cierto tono despectivo), relacionadas con las ciencias experimentales y además una materia que (que se la conoce como la materia C), que puede ser sobre Historia de las matemáticas o sobre epistemología o incluso una materia denominada "tecnología y sociedad".

Pues bien, en general los estudiantes en vez de cursar en forma paralela estas materias como lo indica el plan, aprovechan cursar todas las asignaturas matemáticas que pueden y cuando ya no pueden seguir, finalmente aceptan su destino y ven la forma de sacarse de encima "las materias B y C".

Cuando esos estudiantes se convierten en docentes, esos prejuicios persisten, e incluso se agravan cuando ven que "ya no están obligados" a prestar atención a otras ramas del conocimiento.

La gran alternativa para superar este y otros problemas es la formación de equipos multidisciplinarios no sólo para la investigación, sino también para las tareas de enseñanza. De otro modo, la presentación de ejemplos de aplicación puede convertirse en una caricatura o en una simple alusión vaga e inconexa.

Un ejemplo de lo anterior aparecía en el texto "Apuntes de análisis matemático Y" de la Facultad de Ingeniería. Allí se presentaba un ejemplo, con una integral de Fresnel, que se decía que era utilizada en Óptica, pero sin aclarar nada más. Todos los años los alumnos preguntaban sobre ese particular, el hecho es que en la actual edición aparece el mismo ejemplo y se le denomina integral de Fresnel, pero desapareció toda mención a la Óptica... (incluso en buenos textos como el de Courant y John [6] se da la misma situación).

Todo lo contrario sucedió en el curso de matemáticasIII para Ingeniería de Alimentos, dictado en Facultad de Química en 1996. En dicho curso, que comprende temas de Ecuaciones Diferenciales, Transformación de Laplace, Estabilidad de Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones Diferenciales y algo de Ecuaciones en Derivadas Parciales, se planteó desde un comienzo en todos los repartidos prácticos, un cierto conjunto de problemas de aplicación, tomados de la Físicas, la Química, la Biología, la Termodinámica y el diseño de reactores, entre otra áreas. También se hizo el esfuerzo de dedicarles una parte importante del tiempo de las clases prácticas y de consulta.

El curso estuvo además a cargo de un equipo docente formado por ingenieros y matemáticos trabajando en forma conjunta. La evaluación docente que se realizó en forma anónima al final del curso es una prueba inequívoca del éxito de esta experiencia.

Para obtener resultados similares, el curso debe estar orientado y planificado desde el inicio, hacia la resolución de problemas. En caso contrario la experiencia puede fracasar. Por ejemplo, en la Facultad de Ciencias Económicas se intentaron incluir problemas de optimización en los que se debía maximizar la ganancia neta de una empresa, que debía competir en el mercado etc.. La resistencia de los estudiantes fue enorme en el curso práctico, mientras que la exposición de los mismos fue muy bienvenida en el curso teórico.

Sin embargo, cabe acotar que lo anterior ocurrió durante el dictado del tema "Programación Lineal y no Lineal", que fue el penúltimo de dicho curso.

Lo mismo sucede con la evaluación, sin duda uno de los puntos más delicados de todo el curso. En el curso de MatemáticasIII se incluyeron en todos los exámenes problemas físicos, químicos y de diseño de reactores con excelentes resultados, en cambio fue imposible hacer lo mismo en el curso antes mencionado de la Facultad de Ciencias Económicas.

O se planifica desde un comienzo, o si no, carece de sentido. Lo mismo ocurre a nivel de cursos de posgrado. En el curso de "Tratamiento Estadístico de Datos Ambientales" se hizo una experiencia de este tipo. La evaluación del curso se realizó a través de un trabajo monográfico en que se resolvían problemas reales tan diversos como la calidad del agua en lagos y ríos, contaminación sonora, polución del aire en las cercanías de una planta de fabricación de cemento, etc.. Algunos de estos trabajos resultaron tan interesantes que dieron origen a presentaciones en congresos internacionales especializados en temáticas ambientales.

Conclusiones:

En la mente de muchos estudiantes existen tres tipos de matemática: una matemática "pura" (como la de la clase de matemática tradicional), otra matemática "aplicada" (como la que ven en física, fisicoquímica etc.) y otra matemática "útil para la vida real" que parece tener poco que ver con las dos anteriores.

Un curso basado en la resolución de problemas de otras ciencias y sobre todo problemas tomados de situaciones reales, en que intervienen la modelización, el diseño de experimentos y el análisis de datos, aleja de los estudiantes esa visión absurda de una presunta "tricotomóa" de la matemática.

Por otra parte, la propia resolución de problemas matemáticos puede estar basada en ideas tomadas de otras ciencias. Villani [7] y Guzmán [8], respectivamente, presentan ejemplos muy interesantes de esa situación.

Como efecto secundario, esto ayuda a los estudiantes a superar sus confusiones, en lo que tiene que ver las diferencias metodológicas entre la matemática y otras ciencias que es un problema no menor [9].

No menos importante es el efecto que tiene la resolución de problemas en la formación de estudiantes críticos. La experiencia de enfrentarse a dificultades y vencerlas uno mismo es intransferible.

Finalmente, un aspecto importantísimo de esta concepción es la realización del docente que ve cómo sus estudiantes se enfrentan a los problemas y los logran vencer, descubriendo y disfrutando la resolución. En definitiva vale aquella frase de Tolstoi, "el secreto de la felicidad no está en hacer siempre lo que se quiere, sino querer siempre lo que se hace".

Referencias Bibliográficas

- **Schoenfeld, A.H**. (1994). *Ideas y tendencias en la resolución de problemas*. OMA. Buenos Aires, Argentina
- **Schoenfeld, A.H.**.(1983). *Episodes and executive decision in mathematical problem solving.*. Acquisition of mathematics concepts and prosses. Academic Press.
- **Casella, S., Martínez, V**. (1996). *Los problemas como un núcleo de un curso.* III Reunión de Didáctica de las Matemáticas del Cono Sur.
- **Gaulin, C.** (1996). *Conferencias SUME* 16 de Set. Montevideo, Uruguay.
- **Lewowicz, J.**. *Curso de verano*. Universidad de la República.
- **Courant, R. & John, F**. (1991) Introducción al cálculo y al análisis matemático. Vol. 1. Limusa.
- **Villani, V**. (1991). *Matematica per discipline Bio-Mediche*. McGraw-Hill. Milano.

La relación didáctica profesor-estudiante en la enseñanza del concepto de límite de una función

Carmen Sánchez Gómez
Ángel Contreras de la Fuente
Universidad de Jaén

Este trabajo, parte de un estudio más amplio sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática desde una perspectiva sistémica (Sánchez, 1997), se analizan las relaciones didácticas entre los profesores y los alumnos de la asignatura de Cálculo Infinitesimal del primer curso de Ingenierías Técnicas de la Universidad de Jaén (España), en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la noción de límite de una función. En primer lugar, a través de los resultados obtenidos por medio de varios cuestionarios aplicados a los profesores participantes en el estudio, se describen los perfiles epistemológicos de dos de ellos, siguiendo una metodología cualitativa según el Interaccionismo Simbólico (Llinares, 1992); posteriormente, se analizan los resultados de una prueba de ítems, aplicada antes y después de la instrucción a los grupos de estudiantes de los dos profesores, sobre las concepciones y obstáculos de la noción indicada (Sánchez y Contreras, 1995ª,b). Por último, se relacionan los perfiles de ambos profesores con los resultados obtenidos por sus alumnos, extrayéndose las conclusiones pertinentes.

Metodología del estudio experimental

Objetivos del estudio:

Las investigaciones mencionadas proporcionan una investigación valiosa para la enseñanza del límite; sin embargo, como ya se ha señalado, se centran en aspectos no relacionados con el límite (caso de los profesores), o en cuestiones no referidas a los obstáculos epistemológicos y actos de comprensión sobre el concepto. En esta investigación, entre los objetivos que se pretendían lograr se destaca, por una parte, el análisis del pensamiento de los profesores en la asignatura de Cálculo de primer curso de Ingenierías-Técnicas, en torno a la naturaleza de la matemática, a su enseñanza y a la enseñanza del concepto de límite de una función y, por otra, el estudio de las interacciones entre las creencias de los profesores y la evolución de concepciones de sus alumnos.

Procedimiento de recogida y análisis de datos (profesores):

Se elaboraron tres cuestionarios sobre: naturaleza de las matemáticas, su enseñanza y la enseñanza de la noción de límite funcional. Las preguntas que se realizaron estaban articuladas de modo indirecto, con el objetivo de "provocar" respuestas directamente relacionadas con el sistema de creencias. Como señala Flores (1996): "las creencias de los sujetos no son directamente observables . Pertenecen a un nivel de información profundo, muchas veces inconsciente, no siempre accesible al sujeto investigado. Esto hace que para caracterizar las creencias, se precisen métodos indirectos de investigación que provoquen que los individuos expresen sus puntos de partida, los postulados desde los que argumentan o en virtud de lo que interpretan los fenómenos"(p. 107).

El primer cuestionario, sobre la naturaleza de las matemáticas, sitúa al profesor como espectador de una conversación entre estudiantes de filosofía de la matemática que expresan sus opiniones en torno a sus creencias, al profesor se le indica que intervenga tratando de poner coherencia y haciendo razonar a los alumnos, a fin de mejorar su formación. En el segundo, sobre la enseñanza de las matemáticas, el profesor es moderador de un debate entre colegas y se trata de que obtenga unas conclusiones plausibles. En el tercer cuestionario sobre la enseñanza del concepto del limite funcional, las cuestiones se plantean de modo que a opiniones de los estudiantes sobre el concepto, el profesor ha de intervenir haciendo comentarios clarificadores a los alumnos. En todos los casos los investigadores entregaron una carta previa a los profesores que intervenían en el estudio en la que se aseguraba el anonimato y en la que se solicitaba respuestas lo más amplias posibles. Después se solicitaron sucesivas aclaraciones a algunas de las respuestas.

El análisis del sistema de creencias se basa en la consideración de los constructos: Idea Núcleo, perspectiva en Acción y Razón (Llinares y Sánchez, 1989 ; Moreno, 1991 y Llinares, 1992). Por Idea Núcleo se entiende toda idea básica, a través de la cual se articula el sistema conceptual del profesor; la perspectiva en acción, se refiere a declaraciones particulares para propósitos concretos; la Razón, es un argumento que acompaña a la elección de una creencia, apoyando la idea núcleo y conectando esta con la perspectiva. Para la representación gráfica del sistema de creencias, se utilizarán mapas cognitivos (Llinares y Sánchez, 1989 y Llinares,1992). Para la elaboración de estos, se ha realizado un análisis de contenido a través de estrategias de inducción que permiten, a partir de los datos, obtener variables y relaciones entre ellas, para ello se han detectado unidades de análisis (Divisiones perseptivas que ayudan a convertir los datos en bruto en subconjuntos manejables, desde palabras a proporciones semánticas con sentido propio). Posteriormente, se clasifican las unidades de análisis en Razones y Perspectivas estableciéndose ideas Núcleo que permiten el afloramiento de las componentes de los sistemas de creencias. Por último, se establecen las relaciones entre componentes. De los cuatro mapas elaborados dos para cada profesor.

Procedimientos de recogida y análisis de datos (alumnos):

El procedimiento que se ha utilizado en este investigación para la recogida de los datos necesarios, que permiten detectar la situación de los alumnos respecto al concepto de limite, ha sido el cuestionario ya que es uno de los instrumentos más utilizados en las investigaciones encaminadas a estudiar las concepciones que manifiestan los alumnos en torno a un determinado concepto. Investigadores como (Cornu, 1983; El Bouazzoui, 1988; Azcárate, 1990; Balkar y Tall, 1991; Wenzelburger, 1991; Turégano, 1993 y Ruíz, 1994), han utilizado el cuestionario escrito en sus respectivos trabajos. Aunque el uso de este medio tienen ciertos inconvenientes, asociados a la dificultad que tienen los estudiantes para comunicar sus ideas por escrito, posee unas ventajas cuya consideración condujo a su utilización. El

Bouazzoui, (1988), señala en este sentido: " La recogida de datos con la ayuda de un cuestionario escrito ofrece otras ventajas entre otras:

- La posibilidad de dirigirse a un gran número de sujetos a la vez;
- Una cierta facilidad para el recuento y la corrección."

Además, para superar en lo posible ese problema de comunicación, en el curso 1994-1995, se elaboró un cuestionario piloto que fue pasado a un pequeño número de estudiantes, posteriormente se analizó y, a la luz de las respuestas de los sujetos, se completó y relaboró tratando de eliminar aquellos aspectos que pudieron ser motivo de dificultad o confusión. El uso de cuestionario piloto ha sido recomendado y utilizado por algunos investigadores (Azcárate, 1990 y Ruíz, 1994). La realización de un estudio piloto permite al investigador un contacto con la elaboración de ítemes y con su análisis; en este sentido, Azcárate (1990), destaca dos ventajas del mismo al fascilitar: " la práctica del investigador en la preparación y análisis de un cuestionario escrito, con respuestas abiertas y cerradas destinado a establecer la situación de un grupo de alumnos desconocidos". Antes de la elaboración del cuestionario definitivo, se elaboró un cuestionario de tipo exploratorio y se aplicó durante el curso 1994-1995 a una muestra de alumnos de COU (17-18 años), pertenecientes a cinco centros, privados y públicos, dos de Jaén y tres de la provincia, con objeto de analizar las concepciones de los estudiantes sobre la noción de límite de una función. Teniendo en cuenta lo anterior y ya que uno de los objetivos era detectar las concepciones y obstáculos relativos al concepto de límite de una función en los alumnos de los primeros cursos de ingeniería técnica, se pasó a elaborar el cuestionario definitivo que permitiese obtener de los alumnos una amplia gama de respuestas. Para la elaboración del cuestionario definitivo se tuvieron en cuenta los datos obtenidos de un estudio de manuales (Sánchez y Contreras, 1995b), y también los resultados y las conclusiones del estudio exploratorio realizado. Este cuestionario definitivo se pasó a los alumnos universitarios al principio del curso 1995-1996 (pretest), con objeto de poder analizar sus respuestas previamente a recibir una ampliación en a enseñanza de dicha noción, y antes de finalizar el curso (postest), con objeto de observar la evolución de las mismas. Para asegurar la validez del contenido de nuestro cuestionario seguimos el proceso de elaboración realizado por Ruíz (1994). esta investigador considera las siguientes fases:

1. Recopilación inicial de posibles ítems a incluir en la prueba.
2. Selección de ítems.
3. Elaboración de los ítems seleccionados.
4. Aplicación del cuestionario a una muestra de alumnos.

Conclusiones:

A la vista de los mapas cognitivos de los dos profesores sobre la naturaleza de la Matemática y su enseñanza (Sánchez, 1997), se observan unas diferencias entre ambos que los sitúan en tipologías diferentes:

En el profesor 1 se detecta una fuerte componente formalista en sus creencias, como indica la Razón 1NMB2: "Para obtener resultados, no se procede guiado por la intuición, sino por una demostración rigurosa a partir de axiomas", ligadas a las Ideas Núcleo: "visión formalista de la matemática" y "la matemática como ciencia ligada a la lógica". A la hora de la enseñanza, aparece la perspectiva 1EMB1: "Los alumnos han de comprender las relaciones lógicas entre los conceptos y la lógica de los procedimientos" Paralelamente, en este profesor se puede ver una leve tendencia hacia la Idea Núcleo: "La Matemática como ciencia dinámica que se construye", según la Razón INMC2: "El estudio de nuevos problemas físicos, obliga a crear nuevos objetos y estructuras matemáticas para su solución" y con la perspectiva IEMC1: "El profesor es un estimulador del aprendizaje de los alumnos".

En el caso del profesor 7 sus creencias están más ligadas a la Idea Núcleo "La Matemática como ciencia dinámica que se construye" a través de la Razón 7NMC2: "Las situaciones prácticas aportan nuevos elementos que incorporar a la estructura que está en continua evolución", ligada a varias perspectivas, como por ejemplo la 7EMA3: "Deberemos poner al estudiante en condiciones de poder buscar procedimientos nuevos". Además, también se observa una fuerte tendencia a considerar la Matemática según la Idea Núcleo: "La matemática como instrumento para resolver problemas de la realidad", según la Razón 7NMA3, entre otras, "Habremos de tener presente que los instrumentos matemáticos han surgido motivados para dar respuesta a situaciones que se presentan en la realidad", ligada a la perspectiva 7EMB2: "La base de la enseñanza de la Matemática está en explicar sus aplicaciones".

Al observar el mapa cognitivo sobre la enseñanza de límite de una función del profesor1, se aprecia una única perspectiva ligada a tres Ideas Núcleo, lo cual indica una ausencia de actos de comprensión al plantearse la enseñanza del concepto. Sin embargo, en el caso del profesor 7, se tiene un mapa muy rico, tanto en razones como en perspectivas, con numerosos actos de comprensión que muestran una reflexión sobre la enseñanza del concepto, donde son frecuentes la utilización de ejemplos para lograr el aprendizaje del estudiante, como en el caso de la perspectiva 7EL4C2: "Le daría ejemplos en los que la función presentara una discontinuidad en Xo", o de la 7EL4A4: "El confundir el límite con la cota, podía deberse a que el alumno ha restringido el concepto de límite al de límite en el infinito".

Estos resultados indican que el profesor 1, con un perfil formalista sobre la naturaleza y enseñanza de la Matemática, presenta un perfil sobre la enseñanza de límite de una función donde únicamente aparece un acto de comprensión. En cambio, el profesor 7 que posee un perfil dinámico y constructivista sobre la naturaleza y enseñanza de la Matemática, posee un perfil sobre la enseñanza del límite con numerosos actos de comprensión. Aunque, obviamente, estos resultados no son generalizables, se tratarán de contrastar con nuevos perfiles, profundizando en su sistema de creencias a través de entrevistas semiestructuradas, así como estudiar la transposición didáctica que se realiza del concepto, a fin de observar la correspondencia entre el perfil epistémológico y la puesta en práctica de la enseñanza.

Si se observan los porcentajes de respuestas incorrectas en el pretest y postest en los dos grupos de alumnos, (ver anexo 4), correspondientes a ambos profesores 1 y 7, que son los grupos 4 y 6, respectivamente, se puede apreciar que, en cinco casos el grupo 6 tiene una evolución positiva, al bajar ese porcentaje, mientras que en el estudiante del grupo 4, esa evolución es negativa, subiendo la proporción de contestaciones incorrectas. En otro caso, la evolución es similar y, en dos casos, la evolución es favorable al grupo 6. Por tanto, la tendencia es favorable al grupo del profesor 7, de perfil epistemológico constructivista.

Dado que en general, el grupo correspondiente al profesor 7 obtiene mejores resultados en todas la cuestiones, excepto en las 5 y 6, conviene analizar las causas de tal comportamiento. En primer lugar, se observa que la naturaleza de ambos ítemes es bien diferente, mientras en el 5 se relacionan las concepciones geomético-gráficas y la métrico-analítica, lo que permite al estudiante disponer de diversos campos matemáticos, el geométrico y el algebraico, para realizar inferencias; en el segundo, únicamente aparece la concepción numérica a través de una tabla donde no es posible realizar ningún contraste entre campos. Por otra parte, el expresar el límite por medio, exclusivamente, de una tabla es muy frecuente en los textos, suponiendo implícitamente que el concepto aparece "transparente" para los alumnos, lo cual es cierto ya que durante los momentos en los que se aplicaba el cuestionario, los estudiantes manifestaban sus dudas respecto a la interpretación de la noción que de las tablas, supuestamente, se desprendía.

Referencias Bibliográficas:

- **Azcárate, C.** (1990). La velocidad: Introducción al concepto de derivada. *Tesis doctoral*. Universidad Autónoma de Barcelona.
- **Cornu, B.** (1986). Quelques obstacles a l'aprentissage de la notion de limite. *Laboratoire de Mathematiques Pures*. Université de Grenoble 1.

Un aspecto del enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral: Un ejemplo en la Cinemática.

Germán Muñoz Ortega
Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav - IPN.

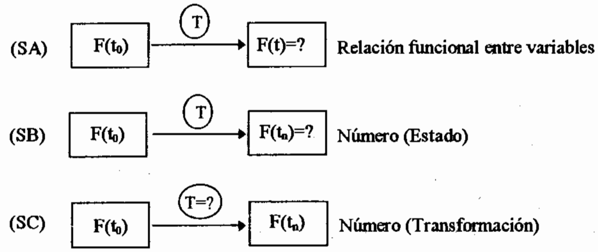
Introducción: La problemática que abordamos consiste en una separación entre lo conceptual y lo algorítmico, en la enseñanza del Cálculo integral, es decir, a los estudiantes se les enseñan procedimientos para calcular integrales con los llamados métodos de integración sólo a través de la ejercitación y de una manera separada de la parte conceptual; es hasta que se abordan las llamadas *aplicaciones* cuando se estudian algunos aspectos de las nociones asociadas a la integración. Sin embargo, en algunos casos, se reduce la parte conceptual a la definición de integral de Cauchy-Riemann; no obstante, se realiza el cálculo de la integral con el teorema fundamental del cálculo. En nuestra investigación identificamos una condición necesaria para propiciar el enlace entre lo conceptual y lo algorítmico, en la enseñanza del Cálculo integral, que consiste en tener un problema específico por resolver que permita pensar en la integración, para hallar la solución. De manera que, identificamos ese tipo de problemas, realizamos un análisis de las diversas situaciones y se caracterizaron las clases de problemas por lo cual nos auxiliamos de la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990).

Tipo de problemas: Después de revisar algunos estudios de tipo histórico, epistemológico y cognoscitivo (Cantoral, 1990; Cordero, 1994; Piaget y García, 1994) pudimos precisar, en cierto modo, el tipo de problemas que, al abordarlos, permiten pensar en la integración, lo cual condensamos así: son los problemas específicos que se derivan de los fenómenos de variación o cambio. Estos problemas específicos no se refieren a las *causas* del fenómeno de variación (por qué varían), sino al *cuánto varían* una vez que se reconoce *cómo varía* el fenómeno ($dF(t)/dt$); es decir, se plantean preguntas acerca de la ley que cuantifica (cantidad desconocida $F(t)$ que relaciona funcionalmente a las variables involucradas) al fenómeno de variación. La configuración de esta ley depende de si son dadas, o no, las condiciones iniciales del problema específico (primera y segunda categoría respectivamente).

De cada categoría se derivan tres posibles situaciones, según la pregunta que se plantea en el problema específico derivado de un fenómeno de variación.

Para la primera categoría, tres situaciones[1] posibles son:

1 El concepto de situación es tomado en el sentido de Vergnaud (1990); es decir, los procesos cognoscitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones a las que se enfrenta.



en donde: SA=Situación A; SB=Situación B; SC=Situación C; T=Transformación; $F(t_0)$=Condición inicial conocida.

En las tres situaciones se inicia la discusión de integración porque la pregunta es sobre la cantidad desconocida ($F(t)$, $F(t_n)$, *o* $F(t_n)$-$F(t_0)$ según sea el caso) que se quiere hallar. Además, se requiere reconocer cómo está variando el fenómeno de variación ($dF(t)/dt$), (Cordero, 1994). Para la segunda categoría las tres situaciones son, de alguna forma, semejantes.

Acerca de la parte conceptual:

Respecto al contenido matemático que nos ocupa se ha señalado que debe hacerse énfasis en nociones como la de *Predicción* y la de *Acumulación*, propias de los fenómenos de variación continua, más que en los conceptos matemáticos, como los de derivada e integral (Cantoral,1990; Cordero, 1994). Las dos nociones anteriores junto con la noción de *constantificación de lo variable* posibilita instalarse en un análisis local del problema específico que permite pensar en la integración (planteamiento de la ecuación diferencial), para después hallar la situación global (la cantidad buscada $F(t)$, $F(t_n)$, *o* $F(t_n)$-$F(t_0)$ según sea el caso). Por supuesto existen otras nociones asociadas al concepto de integración, sin embargo, es importante remarcar que las nociones mencionadas no pueden aislarse de la discusión de un problema específico derivado de un fenómeno de variación o cambio.

Acerca de la naturaleza de los algoritmos de cálculo:

Para poder hallar la situación global ($F(t)$, $F(t_n)$, *o* $F(t_n)$-$F(t_0)$) se puede utilizar alguno de los tres procedimientos canónicos, socialmente establecidos, siguientes:

1) Un procedimiento de antiderivación cuyo instrumento de cálculo es el teorema fundamental del cálculo, que conduce a los llamados *métodos de integración* y la consecuente construcción de tablas de integrales. 2) Un procedimiento de suma cuyo instrumento de cálculo es un *método de integración numérico*. 3) Un procedimiento de derivación sucesiva cuyo instrumento de cálculo es la *serie de Taylor*.

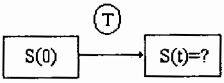
De los cuales hemos encontrado que los llamados *métodos de integración* no son algoritmos porque no cumplen con la definición de algoritmo[2]. Los llamados *métodos de integración numérica* (regla del trapecio, regla del punto medio, regla de Simpson, método de Euler, Euler modificado, y método de Runge-Kutta) y la *serie de Taylor* si son algoritmos en el sentido de dicha definición.

Sin embargo, entender la naturaleza de los algoritmos es necesario pero no suficiente para nuestros fines, por lo cual respecto a lo que podría significar *comprender un algoritmo* tomamos la premisa siguiente, en el contexto de los campos conceptuales: el estudiante no adquiere costumbres o procedimientos preestablecidos por simple condicionamiento, a través de ejercicios repetitivos, sino lo que adquiere son reglas que pueden y deben aplicarse a nuevos problemas. Las adquiere sólidamente sólo si las comprende, es decir, si se da cuenta de la relación que éstas mantienen con la estructura relacional de los problemas a los cuales se aplican (Vergnaud, 1991). De los algoritmos que mencionamos hemos tratado de identificar la relación que mantienen con la estructura relacional de algunos problemas específicos de Cinemática. En este caso las relaciones involucradas son entre la cantidad espacio y la cantidad tiempo, además la estructura se va configurando de acuerdo a cómo cada procedimiento permite pasar de una cantidad a otra, o si las operaciones se realizan en una sola cantidad (ver Capítulo IV de la tesis, Muñoz 1996a). En lo que sigue presentamos un análisis de la estructura de las relaciones entre las cantidades espacio y tiempo. Se pueden hacer dos tipos de análisis[3]. Uno vertical, que consiste en un análisis en una sola categoría de cantidades, y otro horizontal cuando se pasa de una categoría de cantidades a otra (por ejemplo, de tiempo a espacio).

Análisis de un ejemplo sobre la razón de cambio variable. (Primera Categoría).

Ejemplo: si un cuerpo cae libremente desde cierta altura, partiendo del reposo, éste se acelerará a razón constante ($\frac{\Delta V}{\Delta t} = K$). Calcular la posición ulterior del cuerpo en cualquier instante de tiempo t (clase 2a), y en un instante particular t_n (clase 2b), si se desprecia la resistencia del aire.

Consideramos un diagrama como el siguiente:



$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \textit{constante}$$

2 Un algoritmo es una regla (o conjunto de reglas) que permite, para todo problema de una clase dada con anterioridad, conducir a una solución, si existe una, o, dado el caso, mostrar que no hay solución (Vergnaud, 1991,p.258).

3 Estos dos tipos de análisis son usados por Vergnaud (1991) para analizar la estructura de las relaciones entre dos cantidades de diferente naturaleza.

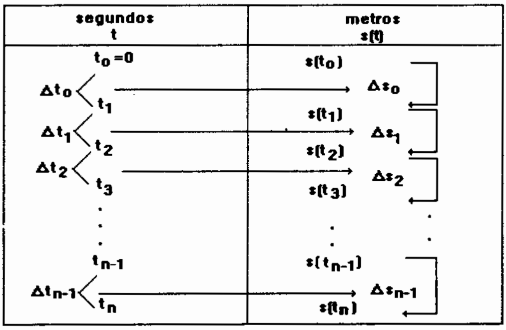
Entonces, el operador función que hace pasar de t segundos a $V(t)$ metros es el factor constante g (m/seg ^{2}.), de donde: $V(t)=gt$. Sin embargo, lo que pide el problema es $S(t)=?$ y $S(t_n)=?$ en donde $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, va cambiando conforme la piedra va cayendo. Analicemos uno de tres posibles caminos:

Primer camino: Consiste en pasar localmente de una categoría de cantidades a otra (de tiempo a espacio), considerando que en un intervalo de tiempo pequeño la velocidad se podría tomar como constante, a partir de cuando inicia el movimiento, y calcular el efecto en espacio o el incremento de espacio que se produce, a saber:

$$\Delta S_0 = V(t_0)\Delta t_0 = gt_0\Delta t_0$$

$$\Delta S_1 = V(t_1)\Delta t_1 = gt_1\Delta t_1$$

El paso de una categoría de cantidades a otra, en forma local, puede ser representado por el diagrama siguiente:



y así, sucesivamente, calcular todos los efectos de espacio o incrementos de espacio, para cada intervalo de tiempo en que se ha dividido el intervalo $[0,t_n]$ (en donde: $\Delta t_0 = \Delta t_1 = \Delta t_n$).

Una vez que se tienen los incrementos de espacio, se realizará el análisis en una sola categoría de cantidades (el espacio), por lo que este análisis se realiza de manera vertical; pero las cantidades involucradas son de naturaleza distinta; debido a que se busca una posición $S(t_n)$, y lo que se tiene son incrementos de espacio (distancias). Aunque de igual dimensión ya que ambos se expresan en metros. Así, sumando todos los efectos parciales, nos da el efecto total (acumulación o cambio total):

$$\Delta S_0 + \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_{n-1}$$

Luego, para llegar a $S(t_n)$, se tiene que hacer una suma acumulada:

$$S(t_0) + \Delta S_0 + \Delta S_1 + \ldots + \Delta S_{n-1} \approx S(t_n)$$

Este camino, y otros análogos, desembocan en lo que se llama *métodos de integración numéricos*.

En este primer camino están presentes varias nociones: la primera es una discretización de una magnitud continua, para poder cuantificarla; en este caso, el tiempo y espacio se han discretizado al hacer la partición. La segunda es una noción que consiste en la posibilidad de considerar a un movimiento variable como un movimiento constante en forma local, lo que permite pasar de una categoría de cantidades a otra(de tiempo a espacio). Una tercera noción es la que subyace del análisis vertical, y consiste en acumular todos los efectos locales para encontrar el efecto total ó acumulación total (en este caso sería $\sum_{i=0}^{n-1} \Delta S_i$). Una cuarta noción es la de predicción del estado ulterior ($S(t_n)=?$), en donde al estado inicial se le suma la acumulación total para encontrar el estado ulterior:

$$S(t_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta S_i \approx S(t_n)$$

En donde la acumulación total es la transformación para pasar de $S(0)$ a $S(t_n)$. Para finalizar, comentaremos que esta investigación sigue en marcha y apunta hacia la identificación de la génesis de las nociones y reglas mencionadas anteriormente cuando el estudiante se enfrenta a una situación problema diseñada con base en el análisis y clasificación de las situaciones reportadas en Muñoz (1996a).

Referencias Bibliográficas:

- **Cantoral, R.** (1990). "Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas". *Tesis doctoral*, Cinvestav-IPN, Sección de Matemática Educativa.
- **Cordero, F.** (1994). "Cognición de la Integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar". *Tesis Doctoral*, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa.
- **Muñoz, G.** (1996a). "Elementos de enlace entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en el Cálculo Integral". *Tesis de Maestría en Ciencias*, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa.
- **Muñoz, G.** (1996b). "Algunos elementos de enlace entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en el Cálculo Integral". *Memoria de la Décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* (pp.109-114). Puerto Rico.
- **Muñoz, G.** (1997). "On the relationship between conceptual and algorithmic aspects in integral calculus: an example in Kinematics". (investigación aceptada para ser presentada en la sesión general del *Research Conference in Collegiate Mathematics Education*, que se realizó del 4 al 7 de Septiembre de 1997 en la Central Michigan University).

Actos visuales y analíticos en el entendimiento de las ecuaciones diferenciales

Miguel Solís Esquinca y Francisco Cordero Osorio
Cinvestav IPN, Conacyt, México

Introducción:

El uso, en el salón de clases, de calculadoras que dibujan gráficas de funciones, ha dado origen a estudios relacionados con este medio tecnológico. De nuestro trabajo, en aula, con este tipo de recurso, obtuvimos un argumento gráfico, que nace en una "aritmética de gráficas" y que es discutido a través de diferentes contenidos matemáticos. En este estudio nos centramos en las ecuaciones diferenciales lineales, como contenido matemático.

Un recurso como la calculadora graficadora permite hablar de diferentes representaciones para el concepto de una función; gráfica, numérica y algebraica. Se habla también de la relación entre contextos gráficos y analíticos. En nuestro trabajo estaremos dando cuenta de la relación entre lo visual y lo analítico, a partir de las estrategias de estudiantes que resuelven problemas matemáticos.

El problema de investigación:

El problema que intentamos abordar es estudiar entendimiento de las ecuaciones diferenciales lineales a través de observar actos visuales y actos analíticos que se presentan en las estrategias de los estudiantes al abordar un problema. Para este estudio se crea un ambiente gráfico específico, donde es posible encontrar argumentos gráficos usados en el precálculo y donde estaremos usando el recurso tecnológico de las calculadoras graficadoras. Mediante observaciones de las estrategias de estudiantes habremos de identificar los actos visuales y analíticos que surgen de éstas y determinar el papel que estos actos juegan en el entendimiento de las ecuaciones diferenciales.

Estaremos usando un argumento gráfico, favorecido por el uso de calculadoras gráficas, y que hemos llamado "comportamiento tendencial". Una hipótesis del estudio es que este argumento es intrínseco a la naturaleza de las ecuaciones diferenciales y no, como sucede con otros recursos gráficos, un elemento externo al que hay que entender en su contexto para luego establecer relaciones con las ecuaciones diferenciales.

Visualización y análisis:

Manejamos los conceptos de acto visual y acto analítico, desde una perspectiva de las estrategia del estudiante, para caracterizar el tipo de pensamiento al que acude para resolver un problema. De la observación de que un estudiante, al enfrentarse a una situación matemática, por momentos utiliza un pensamiento de tipo visual y por momentos uno de tipo analítico, asumimos los dos tipos de pensamiento como mutuamente dependientes.

Existe un modelo que describe esta dependencia como la síntesis final de estos dos tipos de actos (Zazkis et al. 1996). Aunque al principio nuestras observaciones se refieran al modelo, las mismas evidencias permitirán la flexibilidad de éste.

Definiremos, ahora lo que estamos entendiendo por un acto visual y un acto analítico:

Un acto visual es un acto en el cual un individuo establece una fuerte conexión entre un constructo interno y algo al cual se accede a través de los sentidos. Esta conexión puede hacerse en dos direcciones. Un acto visual puede consistir de cualquier construcción mental de objetos y procesos los cuales un individuo asocia con objetos o eventos percibidos por él como externos. Por otro lado, puede consistir de la construcción, sobre algún medio externo como un papel, pizarrón o la pantalla de una computadora, de objetos o eventos los cuales el individuo identifica con objeto(s) o proceso(s) en su mente.

Un acto analítico es cualquier manipulación mental de objetos o procesos con o sin la ayuda de símbolos.

Perspectiva Teórica:

Este proyecto lo estamos trabajando desde la perspectiva teórica de las construcciones mentales. Esta perspectiva está basada en el concepto de abstracción reflexiva de Piaget. Una aplicación de la teoría piagetiana a la educación superior es propuesta por Dubinsky (Dubinsky 1991), en ella da cuenta de invariantes llamados construcciones mentales, estos son acciones, procesos, objetos y esquemas (APOS por sus siglas en inglés). Nuestro trabajo toma elementos de este acercamiento teórico pero enfocados a la evolución adaptativa del conocimiento ante una situación. En ese sentido son los progresos y restricciones de esos invariantes los que nos importan atender.

En lo que respecta al marco epistemológico, además de considerar el contenido matemático como herramienta y significado, habremos de estudiar su génesis, donde eso significa para nosotros, su origen, uso y devenir desde un punto de vista histórico y social.

Metodología:

La metodología consiste en los siguientes pasos:

1. Transformar un hecho a un fenómeno didáctico. En nuestro caso, el hecho consiste en las dificultades que tienen los estudiantes para interactuar (ir y venir) entre los contextos gráficos y algebraico. Este hecho ha sido ubicado en el fenómeno de las representaciones [Vergnaud, 1990] y transformado en el fenómeno didáctico, el cual toma en cuenta las diferentes representaciones, sus formas y niveles, los diferentes planos de representación y los posibles homomorfismos entre ellos. Y las coherencias locales de procedimientos operativos que son derivados de esas representaciones.
2. Describir las dificultades específicas de las situaciones de enseñanza. Tomamos en cuenta la descontextualización y recontextualización que

conlleva a la rehabilitación de significados y sistemas simbólicos, donde descontextualización significa que el contexto original fue perdido y recontextualización significa la búsqueda de un contexto tal vez distinto al original.

3. Establecer un marco teórico que explique las dificultades. El marco, hasta ahora, se compone de los siguientes elementos: abstracción reflexiva y categorías del conocimiento matemático; acciones, procesos, objetos y esquemas; representaciones y procedimientos; niveles de desarrollo.
4. Usar el marco teórico para diseñar situaciones didácticas. Se diseñan situaciones sobre una base socio-epistemológica.
5. Considerar los resultados de 3 y 4 en la implementación e iteración. Las actividades de las entrevistas para cada situación serán diseñadas e implementadas en concordancia con la metodología.

Las Situaciones:

Por el contenido matemático que atendemos, ubicamos el estudio en la matemática universitaria, específicamente en las ecuaciones diferenciales. La enseñanza actual de este tema está fuertemente centrada en lo algebraico y analítico y no propicia el cambio de contexto de analítico a gráfico y viceversa en las estrategias de quien resuelve problemas. Los trabajos de visualización van encaminados en la dirección de atender esta problemática fundamental (Zimmermann & Cunningham 1991). Como se mencionó antes, en nuestros trabajos obtuvimos un argumento gráfico que nos permite relacionar una aritmética de gráficas con la composición de funciones (Cordero & Solís 1997), la expresión $y(x)=A[f(ax+b)]+B$ es una estructura fundamental: obtenida mediante una especie de iteración lineal, iniciada con $y(x)=ax+b$, y donde el análisis de los comportamientos gráficos de ésta es fundamental. La función es concebida como una instrucción que organiza comportamientos. Esta idea, llevada a las ecuaciones diferenciales lineales, es el argumento que nos permite relacionar la gráfica de la función solución con la expresión de la función, pero al trabajarla a través de la estructura fundamental de arriba nos permite simular comportamientos gráficos que se corresponden a la estructura analítica de la ecuación. Con esta perspectiva surge una nueva clase de problemas en donde lo principal ya no es resolver la ecuación sino simular comportamientos gráficos de la solución y la expresión de la ecuación al variar los parámetros tanto de la ecuación como los de la solución.

Para el diseño de la exploración, consideramos cinco circunstancias donde se discuten los argumentos descritos:

Circunstancia 1. Variación de parámetros. A partir de una función prototipo y su gráfica, se hacen variar los parámetros de ésta y se reconocen los efectos que estas variaciones tienen sobre la gráfica. En este sentido decimos que la expresión algebraica $y=a[f(bx+c)]+d$ se puede ver como un conjunto de instrucciones que nos dice como debemos ir modificando (trasladarla, dilatarla o contraerla, reflejarla) la gráfica de $f(x)$ para obtener la gráfica de la expresión de arriba. Las preguntas aquí ya no estarán sobre la variación de la variable sino en el variación de los parámetros.

Circunstancia 2. Simulación de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. La búsqueda de una instrucción que organiza comportamientos en la circunstancia anterior es ahora extrapolada al contexto de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. En este contexto ya no es la expresión analítica de una función y su gráfica sino la expresión analítica de la ecuación y la gráfica de su solución la que estaremos trabajando. Dada una ecuación diferencial con condición inicial, hallamos su solución (analítica y gráfica) y volvemos a ver a la ecuación, haciendo variaciones en la expresión de la ecuación volvemos a resolverla y al volver a la ecuación ver los efectos que esta variación ocasiona en la solución, la intención es reconocer patrones. De ahí que llamemos a esta circunstancia como simulación, en el sentido de experimentar variaciones en la ecuación y ver los efectos en la solución

Circunstancia 3. Comportamiento Tendencial de la Solución. El comportamiento tendencial es un argumento gráfico por el cual decimos que cierta gráfica "tiende" a parecerse a la gráfica de otra que es fácilmente identificable, un caso de esto son los comportamientos asintóticos. De esta manera en esta circunstancia trabajaremos con las ecuaciones diferenciales y sus soluciones de manera que podamos encontrar comportamientos gráficos de la solución que permitan reconocer patrones gráficos a partir de la expresión analítica de la solución. En la ecuación $y'(x)+y(x)=F(x)$ nos estaremos centrando en el término $F(x)$ y su gráfica y lo compararemos con la gráfica de la solución $y(x)$. Veremos que la solución tendrá un comportamiento tendencial a $F(x)$.

Circunstancia 4. Argumentos Analíticos. Trabajando con la ecuación diferencial lineal de primer orden $y'(x)+y(x)=F(x)$. Se analizan algunos aspectos analíticos de su solución. Uno de los métodos de solución consiste en aplicar un factor integrante. Aplicando este método a la expresión general de la ecuación nos conduce a una integración por partes y nos arroja el siguiente resultado $y(x)=F(x)-F'(x)+F''(x)-\ldots+ke^{-x}$. El primer término de esta serie es justamente $F(x)$. Esto podría servirnos de argumento analítico para explicar el por qué las gráficas de F y y, en el contexto gráfico anterior, se parecen.

Circunstancia 5. Generalización del Argumento. Ahora, las circunstancias anteriores pueden ser repetidas para explorar qué sucede en el caso de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Cuestiones de estabilidad de las ecuaciones diferenciales serán ahora discutidas a partir de este argumento.

Para cada una de las cinco circunstancias estaremos diseñando una serie de situaciones matemáticas que permitirán la exploración con estudiantes y profesores, cuando estos se enfrenten a la situación específica. Cada una de las situaciones serán analizadas a través de niveles. Por ejemplo, si la situación diseñada se refiere a la variación de coeficientes de una función consideraremos tres niveles, en el primero estaremos poniendo atención a las operaciones uniarias con una función (traslación y cambio de pendiente); en un segundo nivel nos centraremos en las relaciones que se establecen entre las gráficas de dos o más funciones; cuando la atención la centremos en el manejo de los recursos anteriores para que a partir de una función dada encontremos otra pedida y el sujeto de la entrevista pueda controlar los coeficientes de la función, estaremos hablando de un tercer nivel, la simulación.

Estado actual del proyecto:

El proyecto se encuentra en la etapa de la colección de datos, esta incluye el diseño de situaciones que serán presentadas a los estudiantes por medio de entrevistas clínicas audio y videograbadas. Posterior a esta etapa, estaremos analizando los datos obtenidos a fin de actualizar las situaciones primeras y volverlas aplicar en una primera iteración.

Referencias Bibliográficas:

- **Cordero, F. y Solís, M.** (1997). Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo. *Serie: Cuadernos de Didáctica*. Grupo Editorial Iberoamérica. 2a. Edición. 79 págs. ISBN 970-625-140-5. (1000 ejemplares)
- **Dubinsky, E.** (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking.* (Cap. 7), 96 - 126. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publisher: U.S.A.
- **Vergnaud, G.**, (1990). La theorie des Champs Conceptuales. *Recherches en Didactique de Mathematiques, Vol. 10, 2-3,* (pp. 133-170).
- **Zazkis, R., Dubinsky, E. & Dautermann, J.** (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D_4. *Journal for Research in Mathematics Education.* (27)4, 435-457.
- **Zimmermann & Cunningham** (1991). Visualization in teaching and learning mathematics. *MAA Notes 19.*

ENTENDIMIENTO DE LOS ESTUDIANTES DE CLASES LATERALES, NORMALIDAD Y GRUPOS COCIENTES

M. Asiala, E. Dubinsky- Georgia St., D. Mathews- Southwestern Michigan, S. Morics- Univ. of Redlands, A. Oktaç- Cinvestav-IPN

Introducción: Este escrito presenta un resumen de los resultados de Asiala et al. (1997) el cual reporta un estudio del entendimiento de clases laterales, normalidad y grupos cocientes. El estudio fue llevado a cabo de acuerdo a una metodología muy especifica para la investigación y curriculum diseñada por los miembros de Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC). Encontramos en Asiala et al. (1997) que nuestra perspectiva teórica es útil para describir las construcciones mentales que los estudiantes pueden hacer al aprender clases laterales, normalidad y cocientes. El tratamiento instruccional que fue diseñado para que los estudiantes hagan esas construcciones las cuales estuvieron basadas en una estrategia pedagógica general parece ser efectiva para ayudar a los estudiantes hacer un progreso substancial.

Marco teórico: Nuestro marco teórico tiene tres componentes: un análisis teórico, un tratamiento instruccional, y datos empíricos. Describiremos éstas en Asiala et al. (1996).

El propósito del análisis teórico es proponer una descripción de las construcciones mentales especificas que un estudiante puede hacer para desarrollar su entendimiento del concepto. Estas construcciones se llaman acciones, procesos, objetos y esquemas, por lo cual la teoría se le llama a veces APOE. Ver Asiala et al (1996). Para más detalles sobre estas construcciones en general.

El diseño y la implementación de la instrucción pretende ayudar a los estudiantes a hacer las construcciones mentales propuestas. El método pedagógico incluye el hacer que los estudiantes construyan ideas matemáticas con la computadora usando un lenguaje de programación matemática y también la educativa cooperativa.

Al implementar la instrucción proporciona una oportunidad para obtener datos. El análisis teórico dirige el análisis de los datos al plantear la pregunta: ¿Las construcciones mentales propuestas parecieron ser hechas por los estudiantes? El estado de este análisis puede llevar a revisiones en la descomposición genética. Además, los datos son usados para indicar lo extenso del material aprendido y como este aprendizaje se compara con lo que sucede en las clases que no usan este acercamiento.

Este ciclo es entonces repetido. El análisis teórico inicial es reemplazado por el análisis resultante del ciclo previo, la instrucción es revisada, los datos obtenidos analizados permiten nuevamente revisiones posibles.

Este escrito resume un reporte de una segunda iteración del ciclo en nuestro marco teórico visto como clases laterales, normalidad y grupos cocientes.

Descripción de Asiala et al. (1997): Los sujetos en este estudio fueron estudiantes de licenciatura de una universidad de los Estados Unidos que habían tomado o estaban tomando un curso en álgebra abstracta. El grupo principal consistió de 31, estaban tomado una versión experimental. También fueron incluidos 20 estudiantes que habían tomado un curso de álgebra abstracta en que se enseñaba usando métodos basados en conferencias en diferentes épocas en años previos.

Para la clase experimental y la mayoría del trabajo en el curso fue llevado a cabo en equipos. En el laboratorio de computadoras el estudiante llevaba a cabo actividades con la computadora usando el lenguaje de programación matemática llamado ISETL. Para estimular la reflexión, las actividades con computadora trataban usualmente con conceptos que no se habían estudiado formalmente en clases. Estos conceptos fueron entonces discutidos en la clase. Para motivar más exploraciones de conceptos, se les dejó a los estudiantes tareas a realizar fuera de clase; tanto los ejercicios con computadora como los ejercicios tradicionales fueron incluidos en las tareas.

Los datos fueron obtenidos a través de sus resultados de sus exámenes escritos y a través de dos entrevistas audio grabadas.

Análisis Teórico Inicial: Un punto de partida para el estudio de Asiala et al (1997) fue el siguiente análisis teórico inicial para clases laterales, normalidad y grupos cocientes.

Una concepción de acción de clase lateral tiene que ver con formar una clase lateral en una situación familiar donde las formulas o recetas como los múltiplos de 3 en Z se pueden usar. La concepción de acción no es suficientemente fuerte para manipular la formación de clases laterales en situaciones más complicadas, donde las clases laterales generalmente no son representables por fórmulas o recetas simples. Una concepción de proceso de clase lateral permitirá a un individuo pensar que la clase lateral de un subgrupo por un elemento imaginando el producto de ese elemento con todos los miembros del subgrupo sin tener que formar realmente los productos. Con una concepción de objeto de clase lateral, el individuo puede pensar acerca de una clase lateral, nombrarla y manipularla sin enfocarse necesariamente en como esta formada. Un esquema de clase lateral involucra la coordinación de otras concepciones de clase lateral, tales como la comparación de cardinalidades o el conteo de todas las clases laterales de un subgrupo.

Podemos considerar que la normalidad consiste de una función sobre una pareja (G, H) de un grupo y uno de sus subgrupos. El resultado de aplicar esta función es el valor falso o verdadero correspondiente ya sea a la pareja que satisfaga o no una cierta propiedad. La acción en el esquema de normalidad consiste de la selección de un elemento a de G y coordinando las dos instancias de la formación de la clase lateral, una para obtener la clase lateral izquierda y otra para obtener la clase lateral derecha. El proceso de coordinación consiste en checar la igualdad de dichas. Este proceso es encapsulado al variar el valor de a para obtener una función con valor de proposición cuyo dominio es G y cuyo valor para una a dada en G es el valor verdadero de la afirmación aH=Ha. Finalmente, un esquema de cuantificacion puede ser aplicado a esta función para obtener la condición de normalidad donde el valor verdadero es cierto para toda a en G.

El concepto de grupo cociente es una coordinación de los tres esquemas: el esquema de clase lateral, la operación binaria y los esquemas de grupo, los cuales fueron considerados en Asiala, et al (1997). Esta coordinación consiste en seleccionar construcciones especificas de estos esquemas y aplicarlas a la situación de grupos cociente. De esa manera, a partir del esquema de clase lateral tenemos la formación de un conjunto de clases laterales tenemos la construcción del producto de clases laterales tanto del esquema de la operación binaria como del esquema de clase lateral. Del esquema de grupo tenemos la propiedad de normalidad y dado que el producto de clase lateral junto con el conjunto de todas las clases laterales formadas usando un subgrupo normal de un grupo dado satisface los axiomas de grupo. Finalmente el esquema de grupo también puede ayudar a identificar el grupo cociente resultante con algún grupo familiar.

Reconsiderando los Análisis Epistemológicos: Después de analizar los datos, muy poco de las descomposiciones genéticas aparecieron con necesidad de cambio. La revisión más notable ocurrió en el análisis de los grupos cocientes, donde fue aparente que se necesitaba poner mas énfasis en la coordinación, a través de normalidad, de los varios esquemas.

Resultados del aprendizaje:

Clases Laterales: Los datos sugieren que un considerable porcentaje de los estudiantes del curso experimental habían construido un entendimiento decente. Tenían tanto la concepción de proceso como la de objeto y podían transferir su pensamiento en ambas direcciones entre las dos interpretaciones. En la mayoría de las preguntas el numero de los estudiantes que daban respuestas satisfactorias fue de dos tercios o mas.

Normalidad: Los estudiantes del curso experimental parecieron desarrollar un entendimiento razonable de normalidad . La mitad de los dos tercios de ellos fueron capaces de tratar con las preguntas concernientes de normalidad mientras el curso continuaba. Al final, casi la mitad de esos estudiantes desarrollaron satisfactoriamente en el examen final las preguntas que involucraban normalidad. Una pregunta en la primera entrevista, llevó a respuestas razonables y robustas en alrededor de los dos tercios de los estudiantes, este desarrollo esta en un agudo contraste en lo reportado en Dubinsky et al (1994).

Grupos cocientes: La calidad del entendimiento de grupos cociente de esos estudiantes es diferente. De lo que hemos observado para clases laterales y normalidad como para los conceptos estudiados en Asiala et al, (1996). Para cada uno de ellos hemos visto generalmente que a grosso modo, los dos tercios de los estudiantes parecen haber construido un entendimiento de los bloques esenciales de construcción del concepto de grupo cociente. Sin embargo, existen aspectos de ponerlos todos juntos donde la taza de éxito fue mas cercana a un tercio que a dos tercios.

Es quizá justo resumir el entendimiento de esos estudiantes del concepto de grupo cociente diciendo que un alto porcentaje de los estudiantes habían completado la preparación necesaria para construir su concepto de grupo cociente, pero un numero mucho menor de estudiantes fueron capaces de coordinar su conocimiento para desarrollar un concepto considerablemente completo de grupos cociente.

Sugerencias Pedagógicas y Preguntas Abiertas: Generalmente hablando, nuestra conclusión de Asiala et al. (1997) es que el acercamiento pedagógico que fue usado para el curso experimental debe mantenerse pero se le deben agregar un número de anexos.

Lo más importante serian actividades dirigidas a ayudar a los estudiantes a coordinar todos los componentes de la construcción de un grupo cociente. Los estudios del futuro deben de investigar el entendimiento de los estudiantes sobre la idea de multiplicar clases laterales por representativos siendo independiente de la elección de representativos.

Referencias Bibliográficas:

- **Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K.** (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2, (pp. 1-32).
- **Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D. M., Morics, S. y Oktac, A.** (1997). Development of Students' Understanding of Cosets, Normality, and Quotient Groups. *Journal of Mathematical Behaviour*.

Un estudio exploratorio sobre el pensamiento variacional avanzado en contexto

Ramón Flores Hernández
CINVESTAV - IPN - Universidad Autónoma de Coahuila

Introducción:

El presente reporte de investigación está sustentado en los aspectos epistemológico- cognitivo de la Matemática Educativa ubicada en el Nivel Superior del Sistema Educativo Mexicano. Nuestro objeto de estudio es la noción de variación instalada en el pensamiento del estudiante y observada en un contexto específico; la Resistencia de Materiales. Ciencia ubicada en la currícula de la carrera de Ingeniería Civil, entre otras, siendo esta carrera la que se utilizó como base del estudio.

Nuestro trabajo se delimitó a estudiar únicamente un tema de la Resistencia de Materiales, llamado la "Flexión de Vigas", refiriéndonos al caso del análisis de vigas estáticamente determinadas (todas sus reacciones exteriores pueden calcularse usando solamente las ecuaciones: Σ FH $= 0$, Σ Fv $= 0$ y Σ M $= 0$). Tema que sólo será utilizado como un medio para explorar el "pensamiento variacional avanzado" del estudiante de ingeniería; pensamiento que se apoya en las concepciones que exhiben Cantoral (1993), Solís (1993) y Dolores (1994), sobre el pensamiento matemático avanzado, la noción de variación y el pensamiento variacional, respectivamente. Así pues, el pensamiento variacional avanzado involucra, al menos, las siguientes características:

- Identifica las situaciones donde tiene lugar la variación.
- Es capaz de hacer abstracciones de un alto nivel apoyado en intuiciones apropiadas, utilizando las ideas del Cálculo; enfocándose a argumentar y justificar hechos matemáticos relacionados con situaciones de variación.
- Puede establecer modelaciones de fenómenos que involucran la variación con base en las ideas del Cálculo, y que permiten hacer el fenómeno predecible.

Nuestro objetivo de trabajo fue: indagar en qué medida el estudiante de ingeniería se ha apropiado de un pensamiento variacional avanzado, al enfrentarse al fenómeno de la flexión de vigas.

Antecedentes del estudio:

La práctica educativa nos ha mostrado que el estudiante de ingeniería en los primeros semestres de estudio posee un pensamiento matemático inmaduro, es decir, el grado de abstracción que es capaz de llegar a manejar en la matemática puesta en la escena educativa, y en especial nos referimos al Cálculo, no es muy aceptable. Así mismo, se ha observado que el Cálculo de que se sirve la ingeniería es para el profesor una herramienta y no un conocimiento. Esto propicia una enseñanza básicamente plagada de algoritmos, y es en este aspecto donde se centra el objetivo de la enseñanza del Cálculo en la Ingeniería Civil.

Debido a esta situación, creemos que el estudiante de esta carrera no se ha apropiado de un pensamiento variacional avanzado.

Esta hipótesis fue abordada con base en la Teoría Contructivista del conocimiento desde una perspectiva de la "abstracción reflexiva", entendiéndose ésta como la construcción de objetos mentales y acciones mentales sobre esos objetos [Dubinsky, 1990]. Dicha teoría cognitiva fue usada en forma genérica, tomándose sólo algunos elementos de ella, tales que resultaran útiles para nuestra investigación.

Metodología:

La construcción de un instrumento para localizar y analizar los saberes instalados en el estudiante de ingeniería, se sustentó en la conjugación de dos aspectos: el epistemológico y el cognitivo. La estructuración de la parte epistemológica contrastando la génesis de los conceptos involucrados con la presentación actual que de ellos se hace, auxiliándonos para esto último de libros sobre el tema tratado y de apuntes de una clase normal de Resistencia de Materiales, permitió formular el contenido del instrumento; mientras que el aspecto congnitivo nos ayudó a conocer cómo el estudiante piensa la matemática avanzada en la flexión de vigas. El instrumento lo constituye un cuestionario cuya parte técnica para su elaboración se basó, en cierta medida, en el test de completación que propone Pluvinage (1987); y que consiste en la presentación de un texto de matemáticas al que le faltan palabras claves para la comprensión de su contenido. El cuestionario que utilizamos introduce preguntas en la estructura del texto, tal como lo exhibe Soto (1988), que tienen como finalidad completarlo en aquellas partes donde aparecen desarrollos matemáticos o afirmaciones físicas, que requieren de una argumentación o justificación matemática; ya que por la forma en que son expuestos parecen ser no muy claros o completos, es decir, se pretende rellenar "valores ausentes" [De Vega, 1984]. Para esto, se estructuró el texto en su totalidad en una forma congruente y secuencial, con el fin de que las acciones descritas fueran asimiladas o se acomodaran a la colección de esquemas que posee el estudiante sobre la flexión de vigas y la matemática avanzada, que el tema propicia. A manera de ejemplo se presenta en seguida una pequeña parte del texto:

"_ cuando se enseña este tema el profesor indica que: "el diagrama de momento será una línea recta donde el diagrama de corte es horizontal", y que: "donde el diagrama de corte se una línea recta inclinada, el diagrama de momento será un segmento de una parábola". Otra frase que se maneja con mucha frecuencia es la de: "donde el cortante se cero el momento será máximo". *¿Cómo argumentarías matemáticamente estas tres frases o supuestos?_*"

Este cuestionario fue dividido en dos partes independientes en su resolución una de otra. La Primera Parte contiene 11 preguntas y la Segunda Parte compuesta de 12 preguntas, ubicándose en esta última parte una deducción de la ecuación de la elástica (forma que toma el eje neutro cuando se carga la viga), rescatada del estudio epistemológico realizado en la investigación; misma que motiva el método designado con el nombre de la "Ecuación Generalizada de la Elástica". Este método propuesto por Clebsch en 1862

[Timoshenko, 1983], se integró al cuestionario debido a que creemos que es un buen instrumento de predicción y de exploración del pensamiento variacional avanzado, ya que involucra la justificación y argumentación en hechos matemáticos relacionados con la variación utilizando las ideas del Cálculo.

Sobre las preguntas – respuestas:

El cuestionario lo contestaron 25 estudiantes de la carrera de Ingeniería Civil: 12 estudiantes contestaron la primera parte y 13 la segunda parte. En cuanto a las preguntas planteadas, se dividieron en 3 categorías representadas por las letras A, B y C; cuyo significado es el siguiente:

- La categoría A se refiere a las preguntas de un grado alto de dificultad de contestación; es decir, preguntas difíciles.
- La categoría B se refiere a las preguntas de un grado intermedio de dificultad para contestarlas; es decir, son preguntas ni muy fáciles, ni muy difíciles.
- En la categoría C se ubican las preguntas cuya dificultad es mínima; es decir, son preguntas fáciles.

En cuanto a las respuestas proporcionadas por el estudiante las clasificamos en dos subcategorías; por una parte en respuestas descriptivas, las que designamos como de tipo cualitativo (Cl); además, en respuestas que involucran procesos analíticos, es decir, de tipo cuantitativo (Cn). Así mismo, se observó cómo el estudiante se desempeñó en las respuestas dadas, generando de esta manera una escala ordinal de características cualitativas o subcategorías denotadas por Bueno (B), Regular (R) y Malo (M); cuyo significado lo indicamos en seguida:

- En la característica B se ubican todas las respuestas que se adecúan a las preguntas planteadas; es decir, son respuestas cuyo contenido se corresponde aceptablemente y en forma adecuada con las preguntas planteadas.
- En la característica R se ubican las respuestas cuyo contenido se corresponde con la pregunta planteada en forma parcial y adecuada.
- Para M, se refiere a las respuestas cuyo contenido nada tiene que ver con la pregunta planteada.

En consecuencia, se desprende que las respuestas que caen en Bueno (B) y Regular (R) nos deben mostrar un aceptable pensamiento variacional avanzado (p.v.a.A.) del estudiante de ingeniería. Tocante a las respuestas que caen en la característica Malo (M), nos mostrarán una falta de apropiación de un pensamiento variacional avanzado (p.v.a.No A.) en el estudiante.

La conclusión:

La Resistencia de Materiales, base fundamental de la formación del ingeniero civil, se sirve en muy buena medida de los conceptos del Cálculo; sin embargo, se detectó en el estudio que el discurso escolar de esta materia posee un mínimo de la matemática aludida. Aquí el Ingeniero-Profesor en el discurso que usa, se encarga de "limpiar" la Resistencia de Materiales de este tipo de matemáticas, cambiándola por justificaciones de índole práctico, y por la aplicación de fórmulas y tablas.

Así pues, esta situación indica que las materias de Cálculo estudiadas en los cursos normales de la carrera no se les busca una utilidad práctica, es decir, no se les vincula con las materias fundamentales de la ingeniería, simplemente son vistas como cultura general. Lo que propicia que las ideas del Cálculo sólo las recuerde el estudiante de ingeniería en el momento que cursa dicha materia; prueba de esto es que en los últimos semestres de la carrera poco o nada recuerda de esta matemática. Podemos decir que la interacción del estudiante con el Cálculo le deja un vacío de significado matemático [Nemirovsky, 1990]; en suma, el discurso matemático escolar de ingeniería propicia una cultura matemática de "momento", y aunado a esto, sin una extrapolación concisa hacia los fenómenos de variación relacionados con el conocimiento ingenieríl. A la vez, las materias de ingeniería que pudieran servirse de los conceptos del Cálculo, los evitan; acción ejecutada por el Ingeniero-Profesor.

Justificando estas apreciaciones, diremos que este reporte de investigación muestra que de 29 preguntas efectivas planteadas (este incremento de preguntas se debe a que algunas se dividen en dos o más preguntas) al estudiante de ingeniería, en 21 preguntas la frecuencia de aparición de la clase p.v.a.No A., fue mayor que la frecuencia de la clase p.v.a.A. Además, en 3 preguntas la frecuencia de ambas clases fueron iguales y sólo en 5 preguntas la frecuencia de la clase p.v.a.No A., fue menos que la frecuencia de la clase p.v.a.A. La información que arrojan estos resultados da pie para concluir que nuestra hipótesis de trabajo fue confirmada.

Así mismo, estos resultados indican que hubo más carencias que apropiaciones. En cuanto a las carencias exhibidas por el estudiante a través de la observación indirecta de sus esquemas; es decir, al enfrentarse a una situación problema, nos indican la falta de asimilación de éstos teniendo como contexto la flexión de vigas y como fin el conocer el pensamiento variacional avanzado del sujeto de estudio. Esta falta de asimilación significa que el estudiante no pudo emplear o combinar algunas de las clases de construcción que se identifican en la abstracción reflexiva: interiorización, encapsulación, coordinación, inversión y generalización. En suma, para responder a las preguntas planteadas con una buena dosis de argumentos aceptables, lo cual mostraría un buen pensamiento variacional avanzado, el estudiante debe fabricar algunas combinaciones de las cinco clases de construcción aludidas, a través de tres elementos fundamentales: objeto, proceso y acción. Hecho que se logra mediante la ejecución de las siguientes actividades: aplicando acciones a los objetos e interiorizándolas, construyendo así procesos; creando objetos a través de la encapsulación de procesos; coordinando e invirtiendo procesos para formar otros procesos; así mismo, utilizando esquemas establecidos a nuevas situaciones problema.

Referencias Bibliográficas:

- **Cantoral, R.** (1993). Hacia una Didáctica del Cálculo Basada en la Cognición. *Mem. Cetroam. y Caribe Form. Prof. e Inv. en Mat. Educ.* **7** (1) : (pp.397 – 410).
- **De Vega, M.** (1984). *Introducción a la Psicología Cognitiva.* México: Alianza Editorial Mexicana.
- **Dolores, C.** (1994). Hacia una propuesta metodológica para la enseñanza de la derivada en bachillerato. *Mem. Centroam. y Caribe Form. Prof. e Inv. en Mat. Educ.* **8** (1) : (pp. 53- 58).
- **Dubinsky, E.** (1990). Reflective Abtraction in Advanced Mathematical Thinking. In: D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers. (pp. 95 – 123).
- **Nemirovsky, R.** (1991). Notas sobre la relación entre la Historia y el Aprendizaje Constructivo del Cálculo. *Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática.* **2** (1) : (pp.37 – 53).
- **Pluvinage, F.** (1987). *Test de Completación y Lectura de Textos de Matemáticas.* México: CINVESTAV del IPN (Este libro forma parte de la serie "Cuadernos de investigación").
- **Solís, M.** (1993). *Estudio de la Noción de Variación en Contextos Físicos: El Fenómeno de la Propagación del Calor.* México: CINVESTAV del IPN (Tesis de Maestría en Ciencias Especialidad en Matemática Educativa).
- **Soto, M.** (1988). *Una Experiencia de Redescubrimiento en el Aula: Acerca de los Logaritmos de Números Negativos y de los Orígenes de la Variable Compleja.* México: CINVESTAV del IPN. (Tesis de Maestría en Ciencias Especialidad en Matemática Educativa).
- **Timoshenko, S.** (1993). *History of Strength of Materials.* New York: Dover Publications.

Las funciones generalizadas en ingeniería

Patricia Camarena Gallardo
Instituto Politécnico Nacional, México

Introducción:

En las escuelas de ingeniería existen varios factores que inciden en la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El tema de las Funciones Generalizadas es un tema que principalmente tiene que ver con aspectos inherentes a la propia matemática, lo cual se detecta desde la definición que se proporciona sobre la función Delta de Dirac. Ésta contradice conocimientos previamente establecidos en el alumno, creando confusión en él. Para poder abordar esta problemática, se ha llevado a cabo una investigación en el área de la Matemática Educativa. Ésta se enmarca dentro de la teoría francesa de las Situaciones Didácticas y la Transposición Didáctica, junto con ella, su ahora tradicional metodología: La Ingeniería Didáctica.

Antes de iniciar recordemos que se está usando el término genérico de Funciones Generalizadas en ingeniería, pero se estará trabajando con su representante en la ingeniería, a saber: la Delta de Dirac.

La Ingeniería Didáctica:

Como es sabido, la Ingeniería Didáctica contempla tres fases, la primera: Diagnóstico; la segunda: Diseño de la ingeniería; la tercera: Puesta en escena y análisis de resultados. El presente trabajo solamente aborda la primera fase.

La primera fase está formada por tres componentes: Didáctica, epistemológica y cognitiva. Por lo que en este documento se reporta un resumen del análisis de orden epistemológico, cognitivo y didáctico acerca de las Funciones Generalizadas en escuelas de ingeniería.

Componente epistemológica:

En este punto se recurrió a los escritos originales en donde aparece la Función Delta de Dirac. Oliver Heaviside en los alrededores de 1890 y Gustav Robert Kirchhoff en 1891, introducen en sus trabajos funciones con valor cero en todos sus puntos excepto en uno de ellos, llamadas impulsivas, las cuales tomarán forma con los trabajos de Paul Maurice Dirac de 1936. Con Jan Mikusinski en 1959, poseerán una fundamentación teórica basada en la Teoría de Distribuciones y con esto, quedarán constituidas las Funciones Generalizadas.

A continuación se mostrará parte de la forma de trabajar de Oliver Heaviside.

Para ubicar estos trabajos de Heaviside, principalmente el Cálculo Operacional de Heaviside**, mencionaremos que Maxwell dio toda la teoría que explica el comportamiento de los sistemas electromagnéticos, pero las matemáticas que utilizaba para sus desarrollos eran matemáticas tradicionales, las cuales eran aplicadas con gran dificultad a algunos problemas prácticos.

Uno de los objetivos que tenía en mente Heaviside era simplificar el tratamiento de la teoría electromagnética sin perjudicar la exactitud lograda por Maxwell. Es decir, intentaba resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales evitando las integrales complejas que de ahí obtenía, quería obtener un tratamiento lo más algebraico posible.

Para nuestro interés abordaremos el tema que estudió Heaviside acerca del comportamiento de sistemas eléctricos cuando una fuerza o impulso era violentamente aplicado en t=0.

Heaviside decía:

Cuando un circuito eléctrico no está conectado a una fuente de fuerza electromotriz F, *es decir, posee un interruptor abierto, ninguna fuerza circula por este circuito, o sea que la fuerza electromotriz del circuito es cero. Pero al momento de cerrar el interruptor violentamente se obtiene una fuerza que aparece en el circuito.*

Este es el caso general que le acontece a cualquier circuito sin importar la naturaleza de la fuerza F, por lo que se debe tener una función que describa esta situación.

Primero dice: si una fuerza electromotriz aplicada es cero hasta el tiempo t=0 y después violentamente se eleva a la unidad y de ahí en adelante así permanece, entonces grandes simplificaciones resultan y las soluciones se pueden obtener fácilmente para casos muy complicados, a través de simples operaciones algebraicas.

A este caso particular de fuerza le llamó: "fuerza unitaria" y la designó por el símbolo del número uno pero con letra cursiva, después la denotó por H, símbolo que usaremos de aquí en adelante.

Y que queda definida como:

$$H(t)=\begin{cases}0 \text{ para } t<0\\ 1 \text{ para } t>0\end{cases}$$

Y además dice: H toma todos los valores entre cero y uno en t=0

Al utilizar su Cálculo operacional con el cual resolvía ecuaciones diferenciales lineales, requiere hablar del operador derivada "*p*", el cual lo aplica a su Función, obteniéndose así:

$$pH(t)=\begin{cases}0 \text{ para } t<0\\ 0 \text{ para } t>0\end{cases}$$

Y dice: en el Cálculo Operacional *p*H toma todos los valores desde cero hasta infinito en t=0

La ahora conocida ***función impulso.***

Heaviside analiza diferentes tipos de problemas prácticos de circuitos eléctricos y electromagnéticos, con la consideración de representar a las fuerzas como FH. Algunos seguidores de él le llamaron a su método Teoría de la Función Unitaria.

Entre estos problemas aborda el efecto de carga eléctrica aplicada puntualmente a una línea de transmisión o cable.

Componente didáctica:

La componente didáctica nos proporciona el análisis preliminar de la situación a abordar desde la perspectiva del docente. Para ello se tomarán en cuenta los siguientes elementos:

- La revisión global de los problemas de la enseñanza delas Funciones
- Generalizadas en ingeniería.
- Análisis de los programas de estudio en carreras de Ingeniería
- Electrónica y ramas afines, respecto a las Funciones Generalizadas.
- Análisis de los textos más utilizados que involucran el tema de la
- Funciones Generalizadas en la ingeniería.

Revisión global de los problemas de la enseñanza de las funciones generalizadas en ingeniería. Referente a este rubro, se recalcarán los puntos principales acerca de los problemas de la enseñanza de las funciones mencionadas, ya que es uno de los puntos de más peso.

- Las Funciones Generalizadas, en particular el caso de la función Delta de Dirac y la Función de Heaviside, son funciones no tradicionales.
- Los esquemas que poseen los estudiantes de su curso de Cálculo, no son consistentes con la definición que se les da acerca de la Delta de Dirac.
- De manera natural tienden a trabajar a estas funciones, de forma análoga a como trabajan a las funciones tradicionales.
- No les es concebible el que la definición de la Delta de Dirac, conlleve una expresión junto con una condición.

Análisis de los programas de estudio en carreras de ingeniería electrónica y ramas afines. Para ello se analizaron los programas de estudio de las carreras mencionadas en instituciones de educación superior, tanto públicas como privadas.

En el análisis se detectó que ninguno de los programas de estudio del área de Matemáticas, contempla de forma explícita a las Funciones Generalizadas, ni específicamente a las funciones Delta de Dirac o Función de Heaviside.

En algunos programas detallados se menciona el cálculo de la Transformada de Laplace de estas funciones, cuando se trata el tema de la Transformada de Laplace. En el caso del tema del Análisis de Fourier es más explícito el tratar la Transformada de Fourier de estas funciones. En ningún caso se abre un espacio para tratar a estas funciones.

Análisis de los textos más utilizados que involucran el tema de la funciones generalizadas. Para el logro de este rubro, se analizaron los textos más recomendados en la bibliografía de los programas de estudio de carreras de ingeniería en electrónica y ramas afines. Del estudio determinado en la componente epistemológica, se tiene que: con los trabajos de Heaviside y Dirac, quedan establecidas todas las operaciones y definiciones de las Funciones Generalizadas que son necesarias en ingeniería. Las variantes que se presentan posteriormente en los textos, como se muestra en esta sección, tienen que ver con la forma de definir a la Delta, pues las propiedades son las mismas.

Componente cognitiva:

La componente cognitiva incide en la problemática desde el punto de vista del estudiante. Para esta componente se llevó a cabo un estudio acerca de los efectos de la enseñanza tradicional de las Funciones Generalizadas en las ingenierías, con lo cual se tendrá la pauta para detectar las concepciones que poseen los alumnos respecto a estas funciones.

Para la determinación del diagnóstico de los efectos de la enseñanza tradicional de las Funciones Generalizadas de la ingeniería, se aplicaron cuestionarios. El objeto de esto es detectar dificultades por parte de los estudiantes en el manejo de éstas y sus aplicaciones, para tomarlas en cuenta en la construcción de la alternativa didáctica para la impartición del tema. De hecho, se tienen los siguientes problemas:

- Las Funciones Generalizadas, en particular el caso de la función Delta de Dirac y la Función de Heaviside, son funciones no tradicionales.
- Los esquemas que poseen los estudiantes de su curso de Cálculo, no son consistentes con la definición que se les da acerca de la Delta de Dirac.
- De manera natural tienden a trabajar a estas funciones, de forma análoga a como trabajan a las funciones tradicionales.
- No les es concebible el que la definición de la Delta de Dirac, conlleve una expresión junto con una condición.

Avances:

Con lo anterior, en estos momentos nos encontramos en la segunda fase, la del diseño de secuencias didácticas para comprobar las conjeturas detectadas en la fase de diagnóstico, así como el diseño de una posible alternativa didáctica para la impartición de las Funciones Generalizadas.

Conclusiones:

Se determinó que la Funciones Generalizadas de la ingeniería nacen en el contexto de la ingeniería y que al paso del tiempo se presentan a los estudiantes descontextualizadas. Que tanto el profesor de matemáticas, el de ingeniería, así como los invetigadores e ingenieros que requieren de estas funciones, no tienen un manejo correcto de ellas, y a consecuencia sus estudiantes tampoco. Que el uso que dicen tener de estas funciones no es verdadero, pués solamente las usan para modelar situaciones puntuales o instantáneas, no requieren de un manejo algebraico de ellas, como lo manifiestan al preguntarles sobre éstas. Que manejan a las Funciones Generalizadas de manera análoga a las funciones tradicionales, que no conciben que una función esté dada a través de una fórmula con dos expresiones y además una condición.

Referencias Bibliográficas:

- **Camarena P.** La Enseñanza De Las Matemáticas En El Contexto De La Ingeniería; XXVIII *Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana*, Colima.
- **Cantoral R.** (1994).*Transposición Didáctica Y Situaciones Didácticas*; Documento para el Seminario de Investigación en Ingeniería Didáctica.
- **Farfán R.** (1994). *Ingeniería Didáctica. Acerca De La Puesta En Escena De Los Resultados De Investigación En El Sistema De Enseñanza*, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN.
- **Farfán R.** (1996). *Matemática Educativa E Ingeniería Didáctica*; Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN.

Las habilidades generales matemáticas y la estructuración del conocimiento

Juan Raúl Delgado Rubí
Instituto Superior Politécnico "José A. Echeverría", Cuba

Introducción:

Las distintas escuelas de la psicología cognitiva contemporánea (el enfoque histórico-cultural de Vigotsky, la epistemología genética de Jean Piaget y la psicología del procesamiento de la información) han realizado profundos estudios dedicados a la estructuración del conocimiento y no es casual que una parte considerable de ellos se hayan desarrollado en torno a la estructuración del conocimiento matemático; todas ellas de alguna manera establecen la necesidad de la formación de las estructuras del conocimiento y el desarrollo de habilidades en el sujeto.

Particularmente en Cuba entre 1989 y 1997 se han desarrollado diversas investigaciones, muchas de las cuales han culminado con defensas de tesis de doctorados y maestrías, relacionadas con la estructuración del conocimiento matemático y el desarrollo de habilidades.

Basada en la teoría psicológica de la actividad , una de cuyas tesis defiende que "no se puede separar el saber, del saber hacer, porque siempre saber es saber hacer algo, no puede haber un conocimiento sin una habilidad, sin un saber hacer" (N.F.Talízina, 1984) , la Dra. Herminia Hernández presenta su Sistema Básico de Habilidades Matemáticas como parte del contenido de su Tesis Doctoral (H.Hernández, 1989) y en el artículo "Saltar a la vista lo evidente" (1990) revela este sistema, el que a todas luces parece evidente una vez declarado, y reconocido tácitamente por la comunidad de educadores y profesores de matemática, pero que no por ello deja de ser novedoso, en tanto lo discute en su integridad sistémica, destacando la jerarquización y precedencias de sus elementos y lo más importante quizás, la importancia que tiene la formación consciente de esas habilidades mentales en los estudiantes.

Como integrantes de dicho Sistema Básico se encuentran las habilidades DEFINIR y DEMOSTRAR, "que son las que por su propia naturaleza establecen el vínculo primario con el sistema de conocimientos" (H.Hernández, 1989), así como IDENTIFICAR, INTERPRETAR, RECODIFICAR, GRAFICAR, ALGORIT-MIZAR y CALCULAR mediante las cuales se hace matemática, es decir se resuelven problemas matemáticos en su acepción amplia (no el sentido de A.Schoenfeld (1985)). Este sistema ha tenido de 1989 a la fecha diversas ampliaciones, al incluírsele habilidades tales como: COMPARAR y CONTROLAR.

También se han adicionado otras (no incluidas en el Sistema Básico) tales como: MODELAR, RESOLVER, APROXIMAR y OPTIMIZAR. Así, en conjunto, se les ha dado en llamar Habilidades Generales Matemáticas (HGM). Para más ampliación consultar Delgado (1995) y Hernández (1996).

La formación de HGM y la estructuración del conocimiento matemático:

Es justo destacar que los trabajos de la Dra. Teresa Rodríguez (1991) pueden considerarse los primeros que establecieron un nexo a escala del diseño curricular y de la organización del proceso de asimilación entre dos ineludibles objetivos de la enseñanza de las Matemáticas Superiores: la estructuración del conocimiento y el desarrollo de habilidades generales del pensamiento matemático.

En la actualidad no se pueden desligar la estructuración del conocimiento y la resolución de problemas y ésta requiere necesariamente del desarrollo de habilidades cognitivas, heurísticas y metacognitivas entre otras.

Las HGM están indisolublemente ligadas a un conocimiento "bien estructurado" (en el sentido de Greeno según lo refiere L.Resnick (1991) porque ambos son característicos del actuar de un experto; podría decirse que lo uno soporta lo otro. Es imposible tener un conocimiento fragmentado y poseer habilidades mentales suficientemente generalizadas que operen con él, pues de hecho ellas producirían los reacomodos y conexiones necesarios que redundarían en una estructuración determinada del mismo.

A decir de Talízina (1988) "..al ocupar el lugar estructural del objeto de la acción o al formar parte del contenido de la base orientadora , o constituyendo el objetivo de la acción, los conocimientos pasan por las mismas etapas de las acciones (la actividad) en su conjunto. La calidad de los conocimientos se determina por el carácter de la actividad que se utiliza para su asimilación.", así tanto ella como "la formación del sistema, adecuado a ellos, de acciones mentales transcurren como un proceso único" (1988) y como este "saber hacer" es generalizado, se ha ido formando a través del trabajo con variados materiales y situaciones didácticas, el conocimiento sobre el que se han formado y operan esas habilidades, debe poseer iguales características.

En otro sentido las propias HGM, en particular las heurísticas y metacognitivas, realizan un efecto de feedback al CONTROLAR el propio sujeto (autocontrol), las limitaciones o posibilidades que tiene de acceder a determinada información o de trabajar con determinado cuerpo de conocimientos; o sea ellas sirven como un indicador de la estructuración del conocimiento.

A continuación se abundará en la relación particular que tienen las distintas HGM con la estructuración del conocimiento matemático del sujeto:

La habilidad CONTROLAR permite la estimación, el monitoreo, la toma de decisiones, la verificación y la regulación de la acción del sujeto en el proceso de resolución de un problema. En su carácter de habilidad metacognitiva ella permite informar al sujeto sobre la posible existencia de fallos en su estructura de conocimientos.

La habilidad MODELAR permite la conexión entre el lenguaje común, la visualización y el dominio de los objetos matemáticos (considerados modelos y asociados a determinados símbolos) en virtud de una cierta estructuración del conocimiento. En ella se pone de manifiesto un profundo proceso de abstracción.

La habilidad RECODIFICAR permite relacionar estructuras del conocimiento no disjuntas para un experto, pero regularmente inconexas para quien no tiene el conocimiento "bien estructurado". Quien es capaz de transferir con conciencia de un dominio matemático a otro, para resolver un problema, posee conocimientos generalizados e interconectados, al menos en esa área. La habilidad GRAFICAR, si se asume en el sentido de representar de forma gráfica y sucinta las múltiples relaciones que existen entre diversos objetos matemáticos (p.e. a través de un mapa conceptual o una red semántica), muestra de alguna forma cuán bien estructurado está el conocimiento del sujeto

La habilidad IDENTIFICAR, considerada como la acción de determinar si un objeto pertenece a un concepto atendiendo a sus características esenciales, permite registrar el volumen de condiciones necesarias y suficientes que el sujeto domina y las conexiones que debe hacer para determinarlo. Esta permite registrar la completitud y grado de conexión de la información almacenada en los nodos cognitivos relacionados.

La habilidad OPTIMIZAR, en el sentido de seleccionar la vía o método óptimo de solución (dentro de los disponibles por el sujeto) para resolver un problema, es un indicador que caracteriza la forma de actuar del experto porque entre otras, ello: a)sobrentiende la existencia de un stock de vías entre las cuales escoger y b) exige una valoración previa de las características particulares del problema dentro de una generalidad. Esto evidencia la existencia de un conocimiento estructurado en esa área.

Para lograr una buena estructuración del conocimiento es fundamental resolver problemas; pero este proceso discurre a través de las HGM (primero de su asimilación y después de su uso sistemático).

En tanto las HGM propician que la persona posea recursos para acceder a la información necesaria en el proceso de resolución de problemas, su formación no debe dejarse a la espontaneidad, debe ser guiado por el docente para lograr que se conviertan en una forma natural de actuar del sujeto.

El dominar los modos de actuación generales del experto matemático conllevará al novato a tener cada vez más posibilidades en la resolución de problemas, pero además es lo que asegurará que la estructura de su conocimiento se vaya haciendo cada vez más compleja, más generalizada y más sólida.

Conclusiones:

Este trabajo defiende, como concepción didáctica, el desarrollo de una enseñanza sistémica y problémica en torno a la formación de las habilidades generales que se declaran, las que asegurarán la flexibilidad del pensamiento y la solidez del poder matemático del estudiante y del futuro profesional. En una versión más amplia de este trabajo que se presentará a la revista RELIME se explicitarán las experiencias pedagógicas desarrolladas por el autor, con la colaboración de otros investigadores, que sustentan esta concepción.

Quedan planteados así, numerosos problemas abiertos en torno a la finitud de las HGM y lo más importante, al análisis teórico (psicológico y didáctico) de cada una de ellas, en aras de contribuir a que los docentes puedan instrumentar y lograr su formación adecuada en los estudiantes.

En la labor de enseñar Matemáticas aparece como un imperativo el trabajo con las HGM, pues éstas permiten acometer una multitud de problemas de diferente índole. No asumirlas y concebir sólo la formación de acciones particulares, conlleva a un conocimiento fraccionado, no generali-zado y poco perdurable en el pensamiento del estudiante.

Referencias Bibliográficas:

- **Delgado, J.R.** (1995)."Un sistema de habilidades para la enseñanza de la Matemática". *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa. Tomo II.* Ciudad de la Habana, Cuba.
- **Hernández, H. & Delgado, J. & Valverde, L & Rodríguez, T.** (1996)."Un recurso metacognitivo para la resolución de problemas en Matemática: el Autocontrol". *Memorias del II Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. ISPJAE.*
- **Hernández, H.** (1989)."El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza Superior cubana. Experiencia en el Álgebra Lineal". *Tesis Doctoral.* Ciudad de la Habana, Cuba.

Organización del tema de funciones con enfoque sistémico

Sonia Hernández Rodríguez
Carmen Luisa Méndez Fabret
Juan Raúl Delgado Rubí
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. ISPJAE,
La Habana. Cuba.

Resumen:

El contenido del tema de funciones se estructuró en forma sistémica tomando como invariante el concepto de función en forma general y atendiendo a las características del conjunto de partida y del conjunto de llegada se ven las funciones reales de una variable y varias variables y las funciones vectoriales.

Esta forma de estructurar el conocimiento también permite estudiar propiedades de las funciones como extremos ,asíntotas , monotonía , concavidad y convexidad desde las primeras clases facilitando la sistematización en el aprendizaje de las mismas.

Este enfoque de sistema según refiere la Dra Herminia Hernández permite organizar el proceso de aprendizaje de forma tal que no solo se interioricen los conceptos objeto de estudio , sino que el estudiante logra desarrollar procedimientos lógicos para su mejor asimilación.

Introducción:

En una prueba de diagnóstico de dificultades en el aprendizaje de los contenidos de Cálculo Diferencial, realizada en 1993, se pudo comprobar que muchos de los problemas detectados están dados por un pobre dominio del concepto de función, de las funciones elementales básicas, así como por no saber modelar funciones.

En este trabajo se pretende mostrar como un tratamiento adecuado de los contenidos relacionados con las funciones, repercute en un aprendizaje más eficiente del Cálculo Diferencial.

Tomando como concepción pedagógica el enfoque Histórico-Cultural de Vigotski y la teoría dela actividad Leontiev, se estructuró el contenido en forma sistémica.

Antecedentes:

En la enseñanza precedente los alumnos estudian el concepto de función, las funciones lineales, polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. .Esto hace que en el programa de Matemática I (Cálculo Diferencial) para Ingeniería Industrial sólo se le asignaran 4 horas para las funciones reales de una variable y 4 horas para las de varias variables.

En un diagnóstico de las deficiencias que presentan los estudiantes de Ingeniería Industrial y Química al concluir el estudio del cálculo diferencial, se pudo constatar :

Errores en el cálculo de límites por desconocimiento de las propiedades de las funciones elementales.

Dificultades en la interpretación geométrica de las propiedades de las funciones.

Incapacidad para modelar las funciones que surgen en el planteamiento de un problema.

A partir de los problemas detectados se realizó un análisis sobre la forma en que se trataban los contenidos de funciones, llegándose a la conclusión que se daban en forma fragmentada, lo que atenta contra la formación de estructuras cognoscitivas óptimas en el estudiante.

El concepto de función y las funciones elementales de una variable real, se estudiaban al principio de la asignatura, las funciones reales de varias variables, antes de dar límite de funciones de varias variables, casi a mitad del semestre .

El concepto de extremos no se veía hasta que se estudiaba el trazado de curvas y después al final del semestre al dar problemas de optimización .

Las propiedades como asíntotas, concavidad y convexidad no se empezaban a manejar hasta que se daba el trazado de curvas.

La modelación se trabajaba a partir de que se presentaban los distintos problemas de aplicación .

Tratamiento actual del contenido de funciones:

Para darle solución al problema planteado, se siguió como concepción pedagógica el enfoque Histórico- Cultural de Vigotski y la teoría de la actividad de Leontiev Para ello se estructuró el contenido en forma sistémica, en su variante estuctural funcional. Este enfoque permite organizar el proceso de aprendizaje de forma tal que no sólo se interioricen los conceptos objetos de estudio, sino que el estudiante logra desarrollar procedimientos lógicos para su mejor asimilación.

Los contenidos relacionados con las funciones, constituyen un tema de la asignatura con 30 horas de duración, con el fin de abordar este concepto lo más ampliamente posible, incluyendo tanto aspectos que se supone que el alumno conoce de la enseñanza precedente como otros nuevos.

Este paso se justifica por el hecho de que las funciones constituyen el objeto de estudio sobre el cual se trabajan los conceptos de límite, continuidad, derivada y diferencial, por lo que se hace indispensable que los estudiantes dominen este tema. Por otra parte contenidos de funciones tributan directamente a otras disciplinas del Plan de Estudios de este ingeniero.

La invariante en este tema es precisamente el concepto de función en su forma mas general, a partir del cual y de acuerdo con las características del conjunto de partida y del conjunto imagen se estudian las distintas variantes: funciones reales de una variable, funciones reales de varias variables y funciones vectoriales de una y de varias variables.

Esta forma de estructurar los contenidos también permite estudiar propiedades de las funciones como extremos, asíntotas, acotamiento, monotonía, concavidad y convexidad desde las primeras clases, lo que contribuye a que se asimile la definición de las mismas así como su interpretación geométrica antes de asociarlas con elementos del cálculo diferencial. Esto repercute en la solidez del conocimiento.

Dentro del tema se estudian las funciones elementales básicas, sus propiedades y representación geométrica, así como las transformaciones en las gráficas de las mismas.

También se introducen las superficies cilíndricas y de revolución con un enfoque novedoso (Delgado. 1997) , y los planos, estas se vinculan con la representación de funciones reales de dos variables.

Para lograr óptimos resultados no basta con estructurar los contenidos en forma sistémica, se hace necesario la selección de métodos adecuados a los contenidos, en este caso las conferencias se desarrollan con enfoque problémico y hay predominio de clases prácticas.

Desde las primeras clases se trabaja la modelación de funciones que responden a problemas planteados, también se resuelven problemas sencillos de extremos que no necesitan del cálculo diferencial para su solución

El tema se evalúa en forma sistemática , con preguntas encaminadas a controlar el dominio de los conceptos y propiedades y su aplicación lo que permite conocer el estado del aprendizaje de cada estudiante y tomar las acciones para corregir las deficiencias.

De esta forma se ha logrado disminuir las deficiencias en el aprendizaje del Cálculo Diferencial observándose menos dificultades para modelar las funciones en los diversos problemas de aplicación.

Conclusiones:

El hecho de que las funciones constituyan el objeto de estudio sobre el cual se trabajan los conceptos del Cálculo Diferencial y que además los contenidos de este tema tributan directamente a varias Disciplinas del Plan de Estudio del Ingeniero Industrial justifica que la tercera parte de las horas lectivas de esta asignatura se dedique a este tema.

La estructuración de los contenidos en forma sistémica ,constribuye a la formación de estructuras cognoscitivas óptimas en el estudiante lo que repercute en la mejor utilización de estos conocimientos en el desarrollo del resto de la asignatura.

Cuando se asocian las propiedades de las funciones con su interpretación geométrica, se ayuda a la interiorización de las mismas.

Referencias Bibliográficas:

- **Delgado, J.** (1994). Una variante de organización del Cálculo Diferencial para estudiantes de Ingeniería resolviendo problemas .*Primer Taller Internacional de Ensenanza de la Matemática en Ingeniería y Arquitectura. ISPJAE.*Cuba.
- **González, O.** (1996). *El enfoque Histórico Cultural como fundamento de una concepción pedagógica.CEPES.* Cuba
- **Hernández, H.** (1993). *Didáctica de la Matemática.Escuela Politécnica Nacional.* Quito. Ecuador.

Modelos matemáticos para variaciones poblacionales en Biología

Marta T. de Plaza, Sonia B. de Leiva, Graciela J. de Ostera
Universidad Nacional de Tucumán, Argentina

Introducción:

La Biología como ciencia comenzó realmente al surgir la genética, la evolución y la fisiología no hace mas de 150 años; los avances mas profundos en Biología se han logrado en los últimos 70 u 80 años debido al progreso en los métodos de medida.

La Biomatemática data apenas de principios de este siglo. Así no es posible delinear un claro desarrollo histórico de la Biología o de la Biomatemática como ciencias. La meta básica de la ciencia moderna es crear, en torno a fenómenos reales, modelos que describan y puedan predecir el comportamiento de tales fenómenos. En general se cuenta con modelos diferentes para fenómenos que nuestra limitada percepción señala como diferentes.

Se puede decir entonces que un modelo matemático de un cierto fenómeno biológico es bueno si predice o simula algunos de los comportamientos del fenómeno real. A excepción de esto, está absolutamente fuera de contexto inquirir el significado biológico del modelo mas allá de su poder de predicción. Por otro lado, se puede tratar de encontrar estructuras matemáticas que sirvan de modelo común a diversos y diferentes fenómenos biológicos. Estas estructuras, hasta cierto punto "universales" se esconden detrás de las limitaciones, tanto intelectuales como de percepción, en lo que a fenómenos biológicos se refiere.

Muchas veces, tal vez en la mayoría, las variables que encontramos accesibles en un cierto fenómeno biológico no son las variables canónicas que expresan el fenómeno en su máxima simplicidad. Una de las metas de la Biomatemática es descubrir estas variables canónicas, elaborando modelos, reglas operacionales o estructuras que describan el fenómeno biológico estudiado y que a la vez sean comunes a varios de estos fenómenos.

La Biomatemática es profundamente no reduccionista. Los problemas biológicos se analizan tratando de captar sus cualidades biológicas básicas, para luego ser estudiados por medio del razonamiento y las estructuras matemáticas.

Ecuaciones diferenciales ordinarias en el contexto de la biología:

Consideremos una población de organismos con capacidad para reproducirse. Si las fluctuaciones del número de individuos de la población se realizan en función del tiempo, se estructura un proceso continuo que se denomina *"Dinámica de la población"*.

Si designamos por $y(t)$ a la función del tiempo que representa el número de individuos de la población, su función derivada $y'(t)$ describe la velocidad de variación de $y(t)$. La función: $k(t) = y'(t) / y(t)$ se llama *tasa de crecimiento "per cápita" o instantánea*. Se trata de una función real de variable real t que puede ser constante dependiendo de la naturaleza del proceso.

La definición de $k(t)$ da origen a un modelo matemático al que se ajustan numerosos procesos experimentales relacionados con la fluctuación del número de individuos de distintos tipos de poblaciones. Tal modelo se escribe habitualmente:

$$y'(t) = k(t)\,y(t)$$

Los modelos matemáticos, en los que aparece una expresión relacionando a una función de una variable con su primera o sucesivas derivadas se llaman *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias,* en ellos la incógnita a determinar es la función que los verifica de acuerdo con unas determinadas condiciones que generalmente aluden al número de individuos de la población cuando se inicia la experiencia.

Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias pertenecen a una clase mas amplia de expresiones matemáticas llamadas *Ecuaciones Funcionales* a la que pertenecen gran parte de los llamados *Modelos Determinísticos,* interpretaciones matemáticas de procesos experimentales caracterizados por la inaleatoriedad de los resultados: un *Modelo Determinístico* repite exactamente las mismas conclusiones si se apoya en las mismos supuestos. Son modelos excesivamente rígidos para traducir una realidad biológica pero, no obstante, de gran importancia para el estudio, control y tratamiento de un cuantioso grupo de procesos biológicos. En el amplísimo marco de los Modelos Determinísticos, las ecuaciones diferenciales ordinarias pertenecen a la subclase de *Modelos Determinísticos Continuos*, así denominados por discurrir apoyados en la variable tiempo como una variable contínua.

Un modelo clásico para describir la dinámica de una población es el *Modelo de Malthus* edificado sobre la hipótesis de suponer constante la tasa de crecimiento instantánea. Pero ocurre que el aislamiento de una especie del sistema ecológico en que ésta vive para su estudio es, en general una simplificación que se aparta drásticamente de la realidad, ya que toda especie en un sistema ecológico o sirve de alimento a otra especie (especie depredadora) en la cadena de alimentos del sistema, o se alimenta de alimentos comunes a varias especies (competencia por alimentos), o vive en lugares también comunes a varias especies (competencia por hábitat). Más de una de estas situaciones pueden ocurrir simultáneamente. El estudio de una especie aislada se justifica, sin embargo por que así se presenta un modelo que se ajusta razonablemente bien, a pesar de las simplificaciones citadas, a la evolución del número de individuos de una población humana.

Como correctivo al *Modelo de Malthus*, propuesto en 1798 para las poblaciones humanas y perdida su vigencia y valor, se introdujo en 1 837 el *Modelo de Verhulst* que conduce a una ecuación diferencial -de considerable interés en Biología de Poblaciones - llamada "*Ecuación Logística*".

Estos y tantos otros modelos matemáticos cuya clave es la determinación experimental de la expresión de $k(t)$ que mejor se ajusta al proceso, exige el dominio del concepto y las técnicas asociadas a la teoría matemática de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

El modelo exponencial de Malthus:

El Modelo de Malthus supone constante la función $k(t)$ por lo que la ecuación diferencial que gobierna la dinámica de la hipotética población se escribe:

$$y'(t) = k\,y(t) \qquad (1) \qquad\qquad k = \text{constante}$$

Abordando su integración sometida a las condiciones iniciales $y(0) = y_o$, se obtiene:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{y}\,dy = k\int_0^t dt \qquad ; \qquad \ln|y| - \ln|y_0| = kt$$

$$(y / y_o) = e^{kt} \qquad ; \qquad y(t) = y_o\, e^{kt} \qquad (2)$$

Como $t \geq 0$ y la función exponencial es estrictamente positiva (no puede anularse) la gráfica de la función está siempre por encima del eje de los tiempos y, por tanto, en el primer cuadrante de los ejes coordenados. Si la tasa k fuese cero, la población permanecería constante y su gráfica sería la recta $y = y_o$. Si k es estrictamente positiva la variable dependiente "y" evoluciona de forma indefinidamente creciente a lo largo del tiempo alejándose exponencialmente de la recta $y = y_o$.

El valor del crecimiento: $y'(t) = k\,y_o\, e^{kt}$, o bien $y'(t) = k\,y(t)$

El valor proporcional del crecimiento: $y'(t) / y(t) = [k\; y(t)] / y(t) = k$

Este es el crecimiento típico de bacterias y tumores malignos.

El crecimiento es proporcional al número de individuos en cada instante.

La solución de (2) da el crecimiento ilimitado de una población; sin embargo como el sistema ecológico es cerrado, esto significa que tanto el alimento con que se alimenta la población, como su hábitat a pesar de ser abundantes, no son ilimitados, es decir que debe existir un límite para el crecimiento de esta población. Los individuos de esta especie, después de alcanzar un cierto número, comenzarán a competir entre sí por alimento y hábitat. Por otra parte notemos que una población nula debe mantenerse nula constantemente (tasa de variación cero). El modelo (1) cumple esta última condición, pero no cumple la condición anterior de limitar el crecimiento de la población dada.

Si k es estrictamente negativa la gráfica exponencial de $y(t)$ se acerca asintóticamente al eje de los tiempos a medida que t crece indefinidamente: la población tiende a extinguirse.

El modelo de Verhulst: ecuación logística

Se llama así a la ecuación diferencial: $y' = ry\,[\,1 - (1/k)\; y\,]$ que gobierna la dinámica de muchas poblaciones de organismos.

Obsérvese que esta ecuación escrita así: $y' = r\,y - (r/k)\,y^2$ pone de manifiesto la introducción de un *factor de freno*: $(r/k)\,y^2$ al crecimiento exponencial de Malthus.

Integrando esta ecuación diferencial sometida a condiciones iniciales simbólicas $y(0) = y_o$:

$$\frac{k}{ry(k-y)} \quad ; \quad \int_{y_0}^{y} \frac{k}{ry(k-y)}\,dy = \int_0^t dt$$

La solución particular de la ecuación diferencial resulta pues ser:

$$\ln = \left|\frac{y(k-y_0)}{y_0(k-y)}\right| = rt \quad ;\text{o explícitamente}: \; y = \frac{ky_0}{y_0 + (k-y_0)e^{-rt}}$$

Para valores indefinidamente grandes de t, la función $e^{-r\,t}$ se aproxima indefinidamente a cero y la solución a la recta $y = k$. Esto, inspira dar a k el nombre de *tope* o capacidad máxima de la población.

Quedan a vuestra disposición los ejemplos desarrollados para ilustrar distintas situacio-nes y comparar la implementación de los modelos matemáticos presentados en este trabajo.

Taller: Resolución de problemas que motivan el interés del estudio de la probabilidad y estadística por medio del juego

Silvia Leticia Chavez Pierce
Instituto Tecnologico de Chihuahua II.

Resolución de problemas, con fondo matemático que permiten asentar conocimientos e incentivar el interés hacia el estudio de la probabilidad y estadística por medio del juego.

1. Justificacion: Una preocupación de los pedagogos siempre ha sido unir lo útil con lo deleitable, por ello el taller es una estrategia pedagógica que permite el logro de estos objetivos.

En él, el maestro es un facilitador que proporciona información, asesora, da tips y construye junto con el alumno una respuesta no mecánica que propicia aprendizajes significativos.

Como el taller permite la participación personal y grupal, siempre es productivo y facilita la asimilación de la tarea y el compromiso con la misma.

2. Objetivos: Incentivar el interés hacia el estudio de la probabilidad y estadística.

Asentar conocimientos matemáticos con problemas fáciles a manera de juego.

3.- Metodologia: Mediante ejercicios y con el apoyo de dinámicas de trabajo grupal, se proporcionarán los elementos para definir las bases conceptuales con el propósito de lograr productos.

4. Evaluación: Asistencia del tiempo estipulado, participación y trabajos realizados en el taller.

5. Actividades: Se presentan algunos de los problemas que se manejan en el Taller:

¿Es este un juego justo?

Un juego para dos jugadores. Cada equipo necesitará un par de dados.

REGLAS:

1.- Uno de los jugadores es el JUGADOR y el otro es el BANCO. Solamente el jugador tira los dados.

2.- Cada jugador empieza con $ 10.00

3.- Cada vez que el jugador tire una suma de 7, el banquero deberá pagarle $ 3.00

4.- Cada vez que el jugador tire cualquier otra suma diferente a 7, deberá pagarle al banquero $ 1.00

5.- Se registran los resultados de cada jugada en esta hoja de juego y cuánto dinero el jugador y el banquero tienen al final de cada tirada de los dados.

6.- El jugador con mas dinero al final de las 10 vueltas es el ganador. Si uno de los jugadores está en quiebra antes de las 10 vueltas, el otro jugador es el ganador.

ANTES DE EMPEZAR: Es justo este juego? Porqué?.

	EMPEZAMOS	TIRO 1	TIRO 2	TIRO 3	TIRO 4	TIRO 5	TIRO 6	TIRO 7	TIRO 8	TIRO 9	TIRO 10
	SUMA 7?	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
		NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
JUGADOR	$ 10.00	$	$	$	$	$	$	$	$	$	$
BANQUERO	$ 10.00	$	$	$	$	$	$	$	$	$	$

LANZAMIENTO DE DOS DADOS: Lanzar dos dados y observar la suma de ambos

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

ESPERAMOS

SUMA	PROBABILIDAD	SUMA	PROBABILIDAD
2	$\frac{1}{36} = .0277$	7	$\frac{6}{36} = .1666$
3	$\frac{2}{36} = .0555$	8	$\frac{5}{36} = .1388$
4,	$\frac{3}{36} = .0833$	9	$\frac{4}{36} = .1111$
5	$\frac{4}{36} = .1111$	10	$\frac{3}{36} = .0833$
6	$\frac{5}{36} = .1388$	11	$\frac{2}{36} = .0555$
		12	$\frac{1}{36} = .0277$

Se lanzaron 100 veces los dados y se obtuvo.

SUMA	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	TOTAL
0 = OBSERVADO	1	6	12	12	12	18	15	10	8	4	2	100
E =ESPERADO	2.8	5.6	8.3	11.1	13.9	16.7	13.9	11.1	8.3	5.6	2.8	100.1

$$X^2 = \frac{(0-E)^2}{E} = \frac{1.8^2}{2.8} + \frac{.4^2}{5.6} + \frac{3.7^2}{8.3} + \ldots + \frac{.8^2}{2.8} = 4.1616$$

De la tabla $.90 < p < .95$

El punto de decisión (significado estadístico) es usualmente .10 ó .05 decidido antes del experimento. Si la probabilidad es a ese nivel, podríamos objetar la hipótesis de que los dados sean normales.

Con respecto al problema ¿es éste un juego justo? en donde al jugador le paga el banquero $ 3.00 por cada suma 7 y el jugador al banquero $ 1.00 por cualquier otra suma:

Con respecto a los valores esperados en 100 lanzamientos de 2 dados.

Suma 7	=	16.7	x	$ 3	=	$ 50.1
Cualquier otra suma	=	83.4	x	$ 1	=	$ 83.4

NO ES UN JUEGO JUSTO. Cuánto se necesita que le pague el banquero al jugador por la suma 7 para que sea un juego justo?.

Deja que vengan los kisses a ti

Después de Navidad o después de pascua hay una venta de muchas bolsas de kisses de chocolate envueltos en diferentes colores de papel estaño. Yo coloqué 200 kisses: 170 kisses mezclados de diferentes colores de envoltura y 30 kisses con almendra envueltos en papel estaño dorado en una bolsa grande que está, y una vez puestos en la bolsa se revolvieron, y cada estudiante sin mirar metía la mano en la bolsa y sacaba un kisse (cada día después de clase yo reponía exactamente el número de kisses dorados y de kisses regulares así que yo volvía a tener 30 con almendra y 170 de los regulares en la bolsa cada día). Les informé a mis alumnos que reponía los chocolates al siguiente día, por lo que siempre había 200 en la bolsa y que por eso siempre había el mismo número de chocolates dorados. Pregunté como se podría adivinar o acertar la cantidad de chocolates dorados que había y que explicaran la conclusión a la que habían llegado.

Después de discutir el asunto los alumnos se dispusieron a comer el dulce. Esto lo continúe haciendo por toda una semana, haciendo que ellos escribieran sus conclusiones y razones, dos veces durante ese tiempo. Tuve unas respuestas interesantes

Al final de semana les dije cuantos kisses dorados había en la bolsa y el total lo comparamos con sus respuestas. Sacamos esta proporción:

$$\frac{\text{\# total de alumnos}}{\text{total de kisses en la bolsa}} = \frac{\text{\# total de dulces dorados que se tomaron}}{\text{probabilidad El \# de kisses dorados en la bolsa}}$$

Nosotros resolvimos la proporción para el número que se tomo cada día, para ver que tan cerca estábamos del total correcto.

Entonces nosotros tomamos el promedio de el número de dorados que se tomaron en toda la semana y sacamos la proporción, encontramos que esta estaba mas cerca del total actual, usando el promedio. Hice las siguientes preguntas

¿Podemos predecir con exactitud con solo una prueba?

¿Podemos llegar a un mejor resultado si tomamos los datos para 2 semanas en vez de una?

¿Cuántas semanas (si su maestro proporciona los dulces) tendrían que pasar para estar seguros de que nuestros resultados están correctos (mis alumnos quieren que el experimento se prolongue todo lo que resta del año).

¿Que tiene que ocurrir antes de que se piense en dejar de hacer el experimento y hacer una correcta predicción?.

FINALMENTE:

¿Cuál es la probabilidad de escoger un chocolate en papel estaño dorado?.

¿Cuál es la probabilidad de escoger un chocolate que no sea dorado?.

¿ Sus horoscopos coinciden ?

Los periódicos siempre traen horóscopos. Algunos creen en ellos y otros solo se divierten leyéndolos.

SIGNOS DEL ZODIACO	FECHAS
ARIES	MARZO 21 - ABRIL 20
TAURO	ABRIL 21 - MAYO 22
GEMINIS	MAYO 23 - JUNIO 21
CANCER	JUNIO 22 - JULIO 22
LEO	JULIO 23 - AGOSTO 22
VIRGO	AGOSTO 23 - SEPT. 22
LIBRA	SEPT. 23 - OCTUBRE 22
ESCORPION	OCT. 23 - NOV. 21
SAGITARIO	NOV. 22 - DIC. 22
CAPRICORNIO	DIC. 23 - ENERO 20
ACUARIO	ENERO 21 - FEBRERO 19
PISCIS	FEB. 20 - MARZO 20

1.- Si escogemos 5 personas al azar, hay buenas o malas oportunidades que 2 de ellas hayan nacido bajo el mismo signo?.

2.- Prueba tus predicciones escogiendo 5 grupos de 5 personas cada uno y registra los resultados. Para esto, divide tu grupo de clase en grupos de 5 alumnos. Si no hay suficientes alumnos, puedes terminar tu encuesta en el receso.

Ahora, calculemos la teórica de que al menos 2 personas en un grupo de 5 tengan el mismo signo.

Recuerde Pr (ninguno coincida) + Pr (al menos 2 coincidan) = 1

La primera persona puede nacer bajo cualquier signo; pero la segunda tiene solo 11 posibilidades de no igualar, la tercera tiene 10 posibilidades, la cuarta tiene 9 posibilidades y la quinta persona tiene solo 8 posibilidades.

Pr (ninguno coincida) = Pr (1er, 2do., 3er., 4to. y 5to. signo son todos diferentes)

$$= \frac{12}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdots\cdots$$

3.- ¿Termine el cálculo y halle Pr (al menos 2 coincidan)?

4.- ¿Cual es la Pr de que ninguno coincidan.?

5.- ¿Cual es Pr (de que al menos 2 coincidan en un grupo de 6) ?.

¿ Cuando nacieron ?

1.- Crees que sería agradable que 2 personas de tu salón tengan exactamente su cumpleaños el mismo día y mes?

2.- Haz una encuesta en tu salón para averiguarlo.

Haz una gráfica que muestre los 12 meses y los nombres de los alumnos, como la de abajo.

					ELA 8						
		LYN 6								LEO 16	
	ROSA 4						REY 19				
					BOBY 22				VERO 7		
ENE.	FEB.	MAR.	ABR.	MAY.	JUN.	JUL.	AGO.	SEPT.	OCT.	NOV.	DIC.

3.- ¿ Hubo cumpleaños dobles ?___________ cuántos _______________

4.- ¿ Te sorprendieron los resultados ?_________________

¿por qué si? o ¿por qué no? _____________________________

5.- ¿Si haces una encuesta de otro salón, crees que habría dobles cumpleaños en ese salón?.

6.- ¿Crees que alguien de ese salón pueda tener su día de cumpleaños igual que un alumno de tu salón?______________

Pídele a tu maestro que solicite a uno o dos alumnos hagan una encuesta de cumpleaño's en otro salón y compartan resultados con tu salón.

7.- ¿Hubo algún cumpleaños doble en otro salón?.____________________________________

8.- Combina los resultados de los 2 salones. ¿Cuantos cumpleaños dobles hay ahora? _____esos resultados te sorprenden ? __________.

9.- Hallar la probabilidad de que 2 personas tengan el mismo cumpleaños en un grupo de 24 personas.

10.- Ahora encuentra esta probabilidad para tu grupo.

Avances tecnológicos: nuevos desarrollos físicos y matemáticos.

P. Camarena y M. Rocha
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. IPN

Introducción. En el presente trabajo se muestra un investigación histórica, en donde la hipótesis de la investigación asevera cómo los avances tecnológicos han dado origen a desarrollos en la física y ésta a su vez a desarrollos matemáticos. Para tal efecto se han seleccionado una colección de situaciones reales que dan cuenta de la relación que establece la hipótesis de la investigación.

El objeto de este proyecto, es poder contar con elementos de aplicación de la física y la matemática en el terreno de su surgimiento, necesidad de existencia y vinculación entre la tema mencionada, para llevarlos a el aula en donde estos cursos no serán áridos para el estudiante, tendrán el atractivo que ofrece la realidad histórica de los desarrollos tecnológicos que se viven día con día en este siglo y además se tendrá la integración de la matemática a las áreas de interés.

Entre los ejemplos que se presentan se trata, entre otros, el desarrollo de la tecnología de fundición de metales, su aleación para fabricación de armas y posteriormente el dominio de la fabricación de conductores, el desarrollo tecnológico de cristales fotográficos los cuales permitieron conocer la radiactividad, así como el desarrollo del la transportación para aceptar las teorías relativísticas naciendo así la Física Moderna.

Así mismo, con respecto a la herramienta matemática se abarcan temas y conceptos de diferente tópicos como cálculo Diferencial e Integral de una y más variables, Cálculo Vectorial, Probabilidad y Estadística, cubriendo un gran rango de temas que se imparten en las escuelas de ingeniería.

Metodología: La metodología que se llevó a cabo en el presente trabajo es analítico y sintético de a cuerdo a los siguientes pasos:

a. Observación de la problemática en el entendimiento, atención y capacidad de resolución de problemas matemático de los estudiantes de ingeniería
b. Principios explicativos a través de la investigación bibliográfica, enfocada a la historia de las matemáticas y recolección de documentales.
c. Correlación de los temas selectos de matemáticas con los acontecimientos históricos que los conllevo a su descubrimiento.
d. Deducciones al incursionar los acontecimientos históricos de los temas selectos al inicio de las exposiciones de los desarrollos matemáticos en la impartición de clases a los alumnos de Ingeniería.

1. Avances tecnológicos: nuevos desarrollos físicos y matemáticos:

Se resumen algunos ejemplos, desde el conocimiento de la tecnología de la fundición de metales y sus aleaciones para la fabricación de armas, hasta la fabricación de los conductores, así como otros desarrollos tecnológicos como el de los cristales fotográficos y el de la transportación, que permitieron conocer la radiactividad en los inicios de este siglo, naciendo así la Física Moderna, con nuevas ideas de la física y su nuevo lenguaje matemático, entre estas ideas está la Física Relativista y la Mecánica Cuántica.

1.1. Desde la tecnología de la fundición de metales y sus aleaciones para la fabricación de armas hasta y el desarrollo de conductores.

No podríamos imaginar en que grados de civilización nos encontraríamos si el hombre no hubiera dominado el fuego. El hombre dominó el fuego, con el se calentó y cocino construyendo hogueras por muchos miles años. En estas hogueras se fundieron metales por su calor quedando solidificados de diversas maneras, que al estar al alcance de su mano (las hogueras normalmente se hacían cerca, en el circulo familiar) se utilizaron en la sustitución de las piedras como armas para defenderse. En ésta situación se dieron cuenta de que no se desmoronaban y algunas con ciertas características cortaban, sustituyéndolas en las puntas de lanzas, iniciando así una tecnología que como hasta hoy, ha servido para someter y controlar a los adversarios.

El desarrollo tecnológico siguió con herramientas punzo-cortantes, con este hecho termina esta etapa y perdura por muchos años hasta llegar a un grado de civilización que permitió la aparición de los herreros. Para entonces la tecnología había alcanzado el dominio de la fundición y aleación de algunos metales y con ellos se fabricaron utensilios para la agricultura, navegación, construcción, caseros, chalecos con mallas metálicas (posteriormente conductores) y también cañones para la guerra. Nuevamente transcurrieron muchos años hasta que los desarrollos tecnológicos permitieron disponer de celdas voltáicas, brújulas muy sensibles para que aconteciera otro sorpresivo descubrimiento: el electromagnetismo.

En 1831, el físico Michel Faraday (1791-1867) da un paso decisivo en la comprensión de la interacción de la electricidad y el magnetismo. Al descubrir la inducción electromagnética revela el proceso de "inducir" una corriente. Con base en estos conocimientos y en su capacidad creativa Maxwell integra los campos de la física (magnetismo, electricidad y posteriormente la luz) en una síntesis didáctica al establecer su hipótesis de la corriente de desplazamiento, la cual formula por correspondencia entre las hoy famosas ecuaciones del campo electromagnético. Apoyándose en este conjunto de ecuaciones, generaliza ciertas observaciones experimentales en la forma siguiente:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\varepsilon_o} \quad o \quad div\, D=\rho \quad \text{Ley de Gauss } (electricidad)$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{A}=0 \quad o \quad div\, B=0 \quad \text{Ley de Gauss } (magnetismo)$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}=-\frac{d\Phi_m}{dt} \quad o \quad rot\, E=\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{Ley de Faraday}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}=\mu_0 I+\mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_m}{dt} \quad o \quad div\, B=0 \quad \text{Ley de Ampere Maxwell}$$

Con las ecuaciones de Maxwell se pensó que la teoría de la electricidad estaba completa y que el desarrollo de la física sólo sería una extensión y perfeccionamiento de dicha teoría, el electrón destruiría esa bella imagen posteriormente.

2. La síntesis newtoniana.

El interés fundamental y el mayor logro científico del siglo XVII fue la estructuración de un sistema general de la mecánica, por medio del cual era posible explicar el movimiento de las estrellas en función del comportamiento observable de la materia en la tierra. La respuesta a esta interrogante fue tarea de pensadores, matemáticos y físicos que condujo a la síntesis del conocimiento científico y que cristalizó Newton en su inmortal mecánica: De Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, en donde formuló y demostró las leyes de movimiento y la ley de gravitación universal. Para ello fue necesario que se elaborara matemáticamente y se cimentara sobre mediciones exactas, la doctrina concerniente a la unión del movimiento rectilínio por inercia de los cuerpos celestes y la aceleración centrípeta de la gravedad. La teoría newtoniana de la atracción y el sistema del mundo basado en dicha teoría, fueron resultado de la investigación relativa a la caída de los cuerpos.

2.1. James Clerk Maxwell y otras investigaciones (1831 - 1879) sobre la teoría cinética de los gases combina los principios de la mecánica con las leyes de la teoría de la probabilidad. Para explicar los fundamentos de este procedimiento o método, Maxwell elabora un modelo según el cual el gas consta de una cantidad indeterminada de pequeñas esferas duras y elásticas que actúan unas sobre otras solamente durante el choque. De las interacciones como simples choques elásticos se pasa a la acción de fuerza de interacción o de un campo de fuerza exterior, campo gravitacional o campo eléctrico o magnético (teoría del paramagnetismo y la birefringencia eléctrica o magnética de Langevin). El principio de la mecánica estadística consistente en renunciar a seguir el detalle de esas interacciones y la historia individual de cada molécula, en su lugar se indaga el estado global más probable al que pueden conducir estas historias individuales desconocidas. Ley de Amere que expresa la acción mutua entre dos elementos de corriente. El tercer elemento para la integración de los conocimientos físicos del siglo XIX los proporciona la investigación de Young y Fresnel sobre la teoría de la luz. La hipótesis ondulatoria de Huygens se vio reforzada por los descubrimientos de interferencia, difracción y polarización.

3. Física moderna. (la revolución cuántica):

Entre 1900 y 1930 hubo otra revolución en la Física. Esta fue la época de un nuevo y más general esquema llamado mecánica cuántica. Este nuevo punto de vista tuvo un gran éxito al explicar el comportamiento de los átomos, moléculas y núcleos. Sin embargo, la teoría cuántica se reduce a la Física clásica cuando se aplica a un sistema macroscópico. Así como en la relatividad general, la teoría cuántica requiere que nuestras ideas que tenemos del mundo físico se modifiquen.

La génesis de la hipótesis cuántica parte de la necesidad de explicar una de las "nubes negras" de la física clásica, el problema de la distribución de la energía en el espectro de emisión del cuerpo negro (la catástrofe en el ultravioleta) conduce a Max Planck (1858-1947) a la idea de que la energía no es un proceso continuo sino que es discreto, en contra de las observaciones y de la ciencia fundada de esta manera. Inicia el camino de una nueva concepción física del universo, por medio de la cual es posible establecer los límites teóricos de la física newtoniana. Planck relataba que entre los principios generales de la física destacaban: la invariabilidad de los átomos químicos; la independencia mutua del espacio y del tiempo; y la continuidad de todos los efectos dinámicos, este último era la base de todas las teorías físicas y, en correspondencia con Aristóteles, este principio se sintetizaba en el bien conocido dogma: Natura non facit saltus.

Este dogma actualmente no es consistente, la naturaleza sí da saltos y extraordinarios por cierto. La negación de este principio lleva a Planck a establecer su hipótesis cuántica con la nueva idea de que los cambios en la naturaleza no ocurren en forma continua sino que de manera explosiva.

Así fue a fines del siglo XIX, que los científicos creían haber aprendido casi todo de lo que había que saber de la Física. Las leyes del movimiento de Newton y su teoría universal de la gravitación, el trabajo teórico de Maxwell sobre la unificación la electricidad u el magnetismo, las leyes de la termodinámica y la teoría cinética tenían un gran éxito al explicar una gran variedad de fenómenos.

Sin embargo, a principios del siglo XX, una gran revolución conmoción al mundo de la Física. En 1900 Planck dio las ideas básicas que llevaron a la formulación de la teoría cuántica, y en 1905 Einstein formuló su brillante teoría especial de la relatividad. El entusiasmo de estos tiempos se refleja en las palabras: del mismo Einstein: "vivir esta época fue maravilloso". Las dos ideas tuvieron un efecto profundo en el entendimiento de la naturaleza. En el transcurso de una cuantas décadas, estas teorías inspiraron nuevos descubrimientos y teorías en los campos de la Física atómica, la Física nuclear y en la Física de la materia condensada.

La Física moderna, comprende la teoría especial de la relatividad. Aunque los conceptos fundamentales de esta teoría con frecuencia violan el sentido común, la teoría proporciona una nueva y profunda visión de las leyes de la Física. La teoría cuántica, proporciona nuevos modelos para entender los electrones, átomos y moléculas. La teoría cuántica comprende aplicaciones a la Física atómica y molecular, la Física del estado sólido, superconductividad, Física Nuclear, y Física de partículas.

3.1. la relatividad: En 1905, a la edad 26 años, Einstein publicó su teoría especial de la relatividad. Aunque Einstein hizo muchas contribuciones importantes a la ciencia, la teoría de la relatividad por sí misma representa un de las grandes hazañas intelectuales del siglo XX. Con esta teoría, se puede predecir correctamente observaciones experimentales en un amplio intervalo de velocidades que van desde v = 0 hasta velocidades que se aproximan a la rapidez de la luz. La mecánica newtoniana aceptada por mas 200 años, es un caso especial de la teoría general de Einstein.

La relatividad especial incluye fenómenos tales como el retraso de las relojes y la contracción de la longitud en marcos de referencia que se mueven cuando son medidos por un observador en reposo. También se analizan las formas relativistas de la cantad de movimiento y de la energía y algunas consecuencia de la famosa ecuación de equivalencia entre la masa y la energía, $E = mc^2$.

El hecho de que la mecánica de Newton puede ser remplazada por la teoría especial de la relatividad de Einstein cuando se manejan partículas con velocidades comparables a la velocidad de la luz. Aunque muchos problemas fueron resueltos por la teoría de la relatividad a principios del siglo XX, muchos problemas experimentales y teóricos permanecen sin resolverse. Los intentos de aplicar las leyes de la Física clásica para explicar el comportamiento de la materia a nivel atómico no tuvieron éxito. Algunos fenómenos como la radiación de cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico y la emisión de líneas espectrales por los tomos de un gas en un tubo de descarga, no pueden ser explicados dentro del marco de la Física clásica.

Conclusiones:

1. El desarrollo tecnológico en la historia de la humanidad ha contribuido enormemente en el conocimiento de la naturaleza (Física) y por ende en el desarrollo de su lenguaje (matemáticas).

2. Los sorprendentes descubrimientos físicos inicialmente se obtuvieron de casi de manera directa de la naturaleza.

3. A estas fechas, pareciera que le tenemos que arrancar a la naturaleza sus secretos a través de nuevos desarrollos tecnológicos.

4. Si no hay avances en la tecnología no avanzamos más en el conocimiento de la naturaleza y en su lenguaje. **El hombre no podrá conquistar el universo de las estrellas.**

PENSAMIENTO NUMÉRICO

Resolución de problemas verbales usando estrategias pre-algebraicas: estudio con alumnos de primaria

Julio César Arteaga Palomares
José Guzmán Hernández
Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV - IPN, México

Propósito. Este estudio pretende identificar qué actividades favorecen a los alumnos de quinto grado de primaria para que puedan desarrollar un pensamiento algebraico a partir de sus conocimientos aritméticos en la resolución de problemas verbales mediante el uso de papel y lápiz.

Objetivos. Conocer las estrategias pre-algebraicas de los alumnos de quinto grado de primaria al resolver problemas verbales.

Investigar el proceso que siguen los alumnos al resolver problemas verbales.

Diseñar actividades que favorezcan el desarrollo del pensamiento algebraico a partir de un ambiente aritmético.

Conocer los efectos de la colaboración entre los alumnos al resolver problemas verbales.

Explorar los efectos de la fase de enseñanza en la resolución de problemas verbales.

Preguntas de investigación. ¿Qué estrategias usan los alumnos de quinto grado de primaria al resolver problemas verbales?

¿Cuál es el proceso que siguen los alumnos al resolver dichos problemas?

¿Cuáles son los efectos de la diversificación de estrategias al trabajar en equipo en la resolución de problemas verbales?

¿Cuáles son los efectos de la colaboración entre los alumnos al resolver los problemas mencionados?

¿Cuál es el desarrollo del pensamiento algebraico después de la fase de enseñanza?

Antecedentes. Generalmente los alumnos perciben a las matemáticas - y en especial al álgebra - como algo complicado y tremendamente aburrido, regido por reglas donde su aprendizaje depende en su mayor parte de la memorización. Tradicionalmente la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas han representado una dificultad tanto para el que enseña como para el que aprende, con la intención de encontrar el origen de esas dificultades se revisaron algunas investigaciones sobre la enseñanza del álgebra.

Terezinha (1987) planteó que los conceptos y habilidades matemáticos pueden desarrollarse en el aula y generar estrategias eficientes de resolución de problemas, estas actividades pueden estimular el desarrollo del pensamiento algebraico a partir de las habilidades aritméticas. Al proponer estas actividades se puede comprender la naturaleza del proceso de resolución de problemas verbales y desarrollar estrategias de enseñanza.

Kieran (1988) reportó que los alumnos de secundaria son, con frecuencia, incapaces de aplicar sus conocimientos de álgebra básica al resolver problemas cotidianos, sin embargo, para cubrir esa falta de comprensión, los alumnos utilizan la memorización de reglas y procedimientos y creen que esa actividad representa la esencia del álgebra. Además planteó como un reto de enseñanza la creación de una conexión entre la aritmética y el álgebra.

Rojano (1990) investigó las dificultades que tienen los alumnos al transitar de la aritmética al álgebra. Esta autora menciona que se debe reconocer la existencia de dificultades tanto de carácter instruccional como de naturaleza epistemológica y psicológica que obstruyen la adquisición del álgebra. Refirió que diversos estudios por ejemplo, Booth (1984) y Kieran (1981) revelaron la existencia en los alumnos de un pensamiento aritmético y de habilidades numéricas que no han sido lo suficientemente exploradas y que les permitiría resolver problemas con estrategias numérico-intuitivas donde normalmente se utiliza el lenguaje algebraico.

Otros investigadores como Puig y Cerdán (1990) plantearon algunas interrogantes sobre el carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales, señalan que el proceso de traducción de los problemas verbales aritméticos puede ser estudiado con el método de análisis y síntesis donde se parte de la incógnita mediante la búsqueda de antecedentes hasta reducir todo a datos del problema para luego volver sobre sus pasos. Indicaron que el uso de diagramas puede servir de *puente* para traducir el enunciado verbal a la expresión aritmética que lo resuelve.

Santos (1992) mencionó la importancia del trabajo de Alan Schoenfeld al implementar actividades relacionadas con el proceso de resolver problemas en el aprendizaje de las matemáticas, este último autor plantea que un sujeto hábil en la resolución de problemas es aquel que aplica una amplia gama de estrategias para resolverlos, además reconoce que la claridad en el entendimiento del problema resulta determinante en el proceso de resolución.

Santos (1992) resaltó la importancia de la resolución de problemas en el estudio de las matemáticas,el nuevo enfoque que propone aprender matemáticas mediante la resolución de problemas define a las matemáticas como un producto inacabado, sujeto a un conocimiento dinámico en constante expansión y reajuste de acuerdo con nuevas situaciones problemáticas.

La resolución de problemas es el eje de las actividades que permiten coordinar las experiencias previas, el conocimiento y la intuición, en un esfuerzo por encontrar una solución que no se conoce. Encontrar un resultado no culmina el proceso, la comprobación o validación permite confirmar su conjetura o reformularla, ajustarla o probar que era falsa, encontrar un contraejemplo que la invalide y construir una nueva conjetura.

En la aritmética de la escuela primaria existe oportunidad para el desarrollo del pensamiento algebraico al permitir que los alumnos se acostumbren de manera gradual a utilizar expresiones con literales, a encontrar regularidades, generalizaciones de actividades con patrones numéricos y a expresarlos simbólicamente sin intentar llegar a la manipulación algebraica de los símbolos.

En estudios más recientes, Kilpatrick (1995) propone que mediante la resolución de problemas se puede favorecer una actitud de búsqueda y producción de conjeturas que permita establecer regularidades, patrones y así buscar a mediano plazo, la generalidad. La actividad de resolver problemas ha sido reconocida como un componente importante en el estudio del conocimiento matemático, en este reconocimiento se ha puesto atención tanto al diseño y presentación de los problemas como a las estrategias utilizadas para resolverlos.

Método. La primera fase de la investigación consistió en la búsqueda y diseño de problemas para elaborar un cuestionario diagnóstico que detectara los conocimientos básicos de los alumnos en aritmética así como las estrategias pre-algebraicas que pudieran utilizar en la resolución de problemas verbales. Este cuestionario se aplicó a la totalidad de los 34 alumnos del grupo y mediante el análisis de los resultados se seleccionaron 15 alumnos para la fase de instrucción,ésta constituyó la segunda fase de la investigación.

En esta segunda fase se seleccionaron cinco alumnos de rendimiento **alto**, cinco de rendimiento **medio** y cinco de rendimiento **bajo** para formar cinco equipos de tres alumnos (uno de cada nivel), la formación de los equipos se realizó con las propias preferencias de los estudiantes.

Esta organización de los alumnos pretende explorar las ideas de Vygotsky rescatadas por Tudge (1993) sobre la Zona de Desarrollo Próximo ZDP y la colaboración entre los propios alumnos, con los más capacitados como los mediadores para conducirlos a un desarrollo, es importante mencionar que dependiendo de la naturaleza de las interacciones sociales se puede conducir a un **desarrollo** o a una **regresión** de su pensamiento al colaborar entre iguales. El contexto social es muy importante para que la colaboración entre un niño más capacitado pueda contribuir al desarrollo del niño menos capacitado.

Con los cinco equipos se trabajaron las instrucciones generales para resolver los problemas planteados en las hojas de trabajo. Se dio el trabajo en equipo donde se discutía desde el entendimiento del problemas, la elección y desarrollo de una estrategia y la verificación de la solución, posteriormente se hacía una revisión colectiva de las soluciones encontradas enfocando el análisis en los procesos de resolución y las estrategias utilizadas, se procuró que no quedaran dudas respecto a la solución y verificación de los resultados; se analizaron en promedio dos problemas por sesión diaria de una hora, las sesiones de instrucción fueron videograbadas.

La tercera fase de la investigación consistió en el diseño y aplicación individual de un cuestionario final que explorara los avances logrados con la fase de instrucción y la colaboración entre compañeros.

Resultados preliminares. Los problemas aritméticos del cuestionario diagnóstico fueron resueltos sin dificultad por los alumnos seleccionados, no así con los problemas de tipo algebraico.

Durante la fase de instrucción sugieron diferentes estrategias de resolución de los problemas verbales, entre ellas, se pueden mencionar:

1. Pictorial: dibujos, tablas y recta numérica.
2. Algorítmica: operaciones básicas y regla de tres.
3. Ensayo y refinamiento: tanteo y tanteo sistematizado.
4. Cálculo mental.

En el cuestionario final se presentaron ocho problemas verbales algebraicos, uno de proporcionalidad y otro aritmético, en este último es donde se presentó mayor número de respuestas incorrectas, mientras que en los demás se dio una buena proporción de respuestas correctas , la estrategia de resolución, con frecuencia utilizada fue el tanteo sistematizado; los alumnos verificaron sus respuestas. Respecto a la colaboración entre compañeros, los alumnos mejoraron sensiblemente su rendimiento y ampliaron sus estrategias de resolución.

Además, el trabajo en equipo incidió favorablemente en el **desarrollo** de su pensamiento algebraico a excepción de un equipo donde se dio cierta **regresión** que posiblemente se explique por el grado de seguridad que cada niño aporta a la interacción y a que el alumno de nivel alto participó escasamente en la discusión.Estos primeros resultados parecen indicar que los efectos de la colaboración en el desarrollo cognitivo no son tan nítidos como han afirmado las teorías piagetianas.

Referencias Bibliográficas:

- **Kieran, C.** (1988). *The learning and teaching of school algebra.* NAEP Université du Québec.Montreal. (pp.390-419).
- **Kilpatrick, J.** (1995). *Errores y dificultades de los estudiantes, resolución de problemas.* En Educación Matemática . México, Grupo Editorial Iberoamerica (pp.12-48)
- **Puig, L. y Cerdán, F.** (1990). *Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales.* En Aprendizaje y enseñanza del álgebra (Segundo simposio internacional sobre investigación en educación matemática del 12 al 14 de julio). México: UAEM (pp. 35-48).
- **Rojano,T.et al.** (1990). *Pre-álgebra en ambiente de hojas de cálculo: estudio experimental con niños de 11 a 13 años de edad del Estado de México.* En aprendizaje y enseñanza del álgebra. México: UAEM. (pp. 149-156).
- **Santos, L.** (1992). *Resolución de problemas; el trabajo de Alan Schoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas* . En Educación Matemática Vol. 4 No. 2 agosto 1992. México, Grupo Editorial Iberoamérica (pp.16-24).
- **Terezinha, N. et al.** (1987). *¿Álgebra en el mercado?* En La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria Lecturas. México, SEP (pp.69-88)
- **Tudge, J.** (1993). *Vygotsky, la zona de desarrollo próximo y la colaboración entre pares: connotaciones para la práctica del aula.* En Vygotsky y la Educación. Argentina, Aique Grupo Editor (pp.187-208.)

Aportaciones para un estudio comparativo México-España sobre comportamientos de estudiantes de primaria en la resolución de tareas de razón y proporción

Alejandro Fernández
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universitat de València, España

Introducción: En los últimos años la investigación didáctica sobre el tema de razón y proporción se ha centralizado en la enseñanza secundaria, por lo que poco se sabe sobre su problemática en la enseñanza primaria. En el período 1993-96 se realizan en México unos estudios (Gómez, 1996, Jiménez de la Rosa, 1996 y Muñoz, 1996), que constituyen un primer acercamiento a la comprensión de la evolución de las ideas de alumnos de la escuela primaria acerca de las nociones de razón y proporción. A partir de los estudios mexicanos se inicia en Valencia una investigación[1] cuyo objetivo principal es el de analizar el desempeño de estudiantes españoles de enseñanza primaria frente a tareas relacionadas con la razón y la proporción, además se tiene la intención de comparar los resultados derivados de ambos trabajos.

Para llevar a cabo esta investigación se ha utilizado un cuestionario que es una adaptación de otro diseñado para los estudios mexicanos. El cuestionario adaptado conserva la naturaleza de las tareas y adecúa los contextos y variantes lingüísticas del español utilizado en México a las formas y usos en la ciudad de Valencia. El cuestionario se ha confeccionado en tres versiones, una para cada ciclo de la enseñanza primaria, graduadas en complejidad. En algunos casos se presentan las mismas preguntas a los alumnos de los tres ciclos, en otros se conserva el mismo tipo de estructura, sin embargo hay variaciones en cuanto al escenario, al orden de magnitud o tipo de los números en juego, a las relaciones entre las cantidades, o a las formas de expresión simbólica, y en otros, las tareas se presentan en un solo ciclo. Para aplicar el cuestionario, en el curso 1995-96, se seleccionó un grupo de cada uno de los cursos de enseñanza primaria del Colegio Público de Prácticas de Valencia. Una vez resuelto por todos los estudiantes de cada uno de los seis grupos de primaria elegidos, se procedió a la selección de una muestra representativa equivalente a la utilizada en los estudios mexicanos, diez alumnos por curso.

En este artículo se exponen de manera breve las modificaciones más reseñables que se han introducido en el esquema de clasificación usado en México, como consecuencia del análisis de los datos obtenidos en Valencia, que incluye algunos resultados correspondientes a tareas no analizadas en los estudios mexicanos (para más detalles ver Figueras et al. 1997).

1 Este artículo resume una parte del trabajo realizado con los profesores: Olimpia Figueras, Bernardo Gómez y Joan Margarit.

El modelo original de interpretación:

El esquema original de interpretación fue elaborado en México para organizar el análisis de las respuestas. Estas se agruparon de acuerdo con características comunes, desde un enfoque relacional, y a partir de la identificación de tendencias y patrones del desempeño de los alumnos; lo que condujo a un modelo de interpretación de la información en varias categorías descriptivas del comportamiento de los niños. Estas categorías dan cuenta de la percepción que tienen los alumnos de las relaciones en juego entre los elementos de la información gráfica, verbal o pictórica de la tarea propuesta y de los aspectos en los que centran su atención para resolverla.

Cuatro categorías fueron caracterizadas para el esquema: 1ª) Percepción relacional de los elementos de la información; 2ª)Percepción aislada de elementos de la información; 3ª) Respuesta pertinente, pero inducida por la ambigüedad del enunciado y 4ª) Respuesta no identificada, no contesta.

Las dos primeras categorías son relevantes para identificar tendencias de comportamientos vinculadas al razonamiento relacional. Aunque las respuestas de los estudiantes asignadas a cada uno de estas categorías tienen aspectos comunes, fue necesario diferenciarlas de acuerdo con elementos particulares y centrándose en las similitudes, por lo que subcategorias y clases fueron definidas.

Aportaciones para el modelo y el estudio comparativo:

En un principio se utilizó el esquema original de interpretación y clasificación para analizar los datos recogidos en Valencia, sin embargo se detectaron carencias, pues no todas las respuestas de los estudiantes pudieron ser interpretadas y clasificadas con el modelo inicial. Es importante mencionar que en el estudio realizado en Valencia se analizaron las respuestas a las tareas llamadas "Collares", "Cuadrado" y "Piso", de las que hablaremos más adelante, que estaban incluidas en el cuestionario mexicano pero que no habían sido analizadas. Este análisis aportó nuevos datos, tanto para las conclusiones como para delinear futuras indagaciones, debido a que suscitaron algunas reflexiones importantes, unas respecto a los contextos empleados, sobre todo el contexto asociado a las ideas intuitivas del concepto de densidad, y otras respecto a las formas de codificar una secuencia descendente con una simulación de compuestos numéricos (grupos de tres elementos asociados a dos códigos gráficos distintos).

Como consecuencia de ello se derivaron dos tipos de aportaciones al modelo de interpretación de respuestas elaborado en México: a) Relacionadas con comportamientos no observados en México que amplían la casuística de las clases o dan lugar a nuevas clases. b) Relacionadas con comportamientos no observados en México, en tareas del cuestionario mexicano que allí no se analizaron, que dan lugar a nuevas clases.

Como ejemplo de aportación del tipo a) se ha incorporado una nueva clase, en la primera categoría, dentro de la subcategoría "Identificación de la relación de cambio y uso parcial de la misma" con el título "*Uso lineal de una relación bidimensional*".

En esta clase se han agrupado aquellas respuestas en las que se observa una tendencia a la aplicación de un aumento constante en una de las dos direcciones, vertical u horizontal. Las manifestaciones de este comportamiento surgen en la tarea "Perro" en la que se requiere hacer la reproducción "doble" o a escala "2 a 1" de la figura de un perro dibujado sobre una cuadrícula, el estudiante pese a que toma en cuenta el factor de proporcionalidad centra su atención solamente sobre una de las componentes ortogonales, aplica de manera consistente la ampliación de las líneas en una dirección y varía su comportamiento en la otra.

Como ejemplos de aportaciones del tipo b) se han incorporado dos nuevas clases en la segunda categoría, ambas en la misma subcategoría "Predominio de una parte del enunciado verbal o gráfico".

La primera, con el título "*Centramiento en información verbal o gráfica: vocablos, singular, plural, pictogramas, ...*", se incorpora al esquema clasificatorio para incluir un tipo de comportamiento relacionado con el predominio de aspectos de la información que actúan como distractores o que no son los relevantes para hallar la respuesta a la pregunta que se plantea en la tarea propuesta. Esta clase surgió del análisis de algunas respuestas a la tarea "Piso", que está propuesta en todos los ciclos, en ella se requiere verificar la desigualdad de dos razones no unitarias y determinar la mayor. La tarea tiene dos partes, en la primera los antecedentes son iguales, y en la segunda lo son los consecuentes. Es una de las tareas que no se analizaron en México por lo que consideramos relevante presentar los datos del estudio español.Como se observa en las tablas de frecuencias que aparecen mas adelante, el comportamiento predominante en las respuestas no acertadas es el asociado al centramiento en parte de la información gráfica.

La segunda, con el título "*Centramiento en la numerosidad*", se incorpora al esquema y en ella se incluyen aquellos comportamientos observados en la actividad "Collares", en los que el estudiante manifiesta percibir la regularidad del código 3 blancas-3 negras, pero no percibe la variación del número de agrupaciones que hay en cada collar, es decir el patrón de decremento que hay en la tarea, por lo que se considera que tiene una tendencia a "centrarse en la numerosidad" de un modelo que repite.

La tarea "Collares", propuesta en primer ciclo, requiere la identificación de una doble regularidad, una es la interpretación de un código gráfico y la otra la cuantificación de un decremento. Esta tarea es de las que tampoco se analizaron en México, se presentan los datos del estudio español con la misma finalidad que lo expuesto para la tarea "Piso". La tarea es difícil para los estudiantes de este ciclo ya que ninguno respondió adecuadamente. El comportamiento predominante que se observa en ambos cursos es el asociado a un predominio de una parte del enunciado gráfico, las respuestas de primer curso se concentran en torno a la repetición de un dato del enunciado y las de segundo curso se centran en conservar la numerosidad, como puede apreciarse en las tablas.

PISO a)						
	1º	2º	3º	4º	5º	6º
111		4	7	5	5	7
221	1	1				
225	8	5	3	3	4	3
41	1					
42					1	
43				2		

PISO b)					
1º	2º	3º	4º	5º	6º
5	2	8	5	5	8
				1	
3	5		3	3	2
1					
	3	1		1	
1			2		

COLLARES		
	1º	2º
112		1
121	1	
221	6	1
225		1
227		6
41	1	
42	2	1

CUADRADO				
	1º	2º	3º	4º
111	1	1	1	6
112	5	2	8	3
221	3	2		1
224		1		
226		3		
31		1		
43	1			

111 Respuesta acertada
112 Enfrentamiento con dificultades
121 Repetición del patrón
221 Repetición de un dato
225 Centramiento en la informac. gráfica
226 Centramiento en la simetría
227 Centramiento en la numerosidad
31 Interpretación distinta del enunciado
41 Respuesta no relevante
42 Respuesta no identificada
43 No responde

Como ejemplo de una combinación de las aportaciones de tipo a) y b), se incorpora al esquema clasificatorio en la segunda categoría una clase con el título *"Centramiento sobre la simetría axial"*, para incluir un tipo de comportamiento en el que se manifiesta que los niños han centrado su atención sobre los elementos gráficos, asociando a una de las líneas rectas que aparece como dato la función de un eje de simetría, este significado los conduce a dibujar una figura simétrica a la dada. Este manera de interpretar el enunciado global de un problema surge en las respuestas de los niños a las tareas "Cuadrado" y "Rectángulo".

La tarea "Cuadrado", propuesta en 1° y 2° ciclos, requiere reproducir una figura bidimensional a escala de otra dada, completando la figura a partir de un lado conocido. Se ubica en un contexto geométrico, el factor de proporcionalidad "tres" se da implícitamente en el enunciado, y la solución que se demanda es gráfica, Esta es otra de las tareas no analizadas en el estudio mexicano. A la vista de los datos se puede decir que los estudiantes resuelven satisfactoriamente la tarea. En las respuestas no acertadas destacan en primer ciclo dos comportamientos, uno es el asociado a la repetición de un dato, y el otro, observado sólo en segundo curso, está asociado a un predominio del enunciado gráfico con un centramiento en la simetría axial.

De un análisis de textos escolares y de la programación escolar del centro donde se aplicó la prueba se ha constatado que desde los primeros cursos de la enseñanza primaria se llevan a cabo actividades relacionadas con la simetría axial. En consecuencia este tipo de respuestas parece que están asociadas a una clase de tareas en las que los alumnos responden, sin analizar la tarea que se les ha presentado, ejecutando las acciones propias de una actvidad realizada recientemente en clase.

Finalmente, se han realizado otras aportaciones al modelo que no son del tipo a) ni b) que permiten distinguir las actuaciones de los alumnos, así en la cuarta categoría "Respuesta no identificada, no contesta" se cambió el nombre por *"Respuestas singulares"*. Además se amplió y desglosó en tres subcategorías: *"Respuesta identificada, pero no pertinente"*; *"Respuesta no identificada"*. y *"Sin respuesta"*.

Epílogo:

Estas aportaciones al modelo original (y las modificaciones que también se realizaron en él) permitieron analizar todos los comportamientos observados en el estudio de los datos obtenidos en Valencia y proporcionaron un modelo "mas fino" para interpretar y clasificar las respuestas de los estudiantes. Este nuevo modelo y el análisis de todas las tareas propuestas en el cuestionario mexicano y en su equivalente adaptado español permitiran abordar un estudio comparativo completo de los comportamientos de estudiantes de enseñanza primaria de ambos paises en relación con dicho cuestionario.

Referencias Bibliográficas:

- **Figueras, O; Gómez, B.; Fernández, A. y Margarit, J.** (1997): Razón y proporción: Precursores de los conceptos, tendencias cognitivas de los alumnos, resolución de problemas. Un estudio con alumnos de enseñanza obligatoria. Memoria de investigación no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia.
- **Gómez, H.** (1996): Indicios del pensamiento proporcional. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México.
- **Jiménez de la Rosa, E** (1996): De la lectura del error a una interpretación de los saberes de los niños. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México.
- **Muñoz, E** (1996): Pensamiento relacional en una etapa de transición. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México.

Estrategias de estimacion utilizadas por alumnos de primer grado de secundaria en la solucion de problemas de division de fracciones

Fortino Escareño Soberanes, Simón Mochón y Sonia Ursini
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav

El propósito de este estudio es identificar y describir las estrategias de estimación que los alumnos son capaces de usar en sus respuestas a problemas de división de fracciones, cuando cuentan con la ayuda de un colaborador experto. También se propone indagar otras dos cuestiones que se hallan íntimamente ligadas a este propósito central:

•Cuáles son los conceptos numéricos que los alumnos requieren para elaborar estas estrategias dado que suponemos que éstos no se utilizan de la misma forma que en los cálculos con lápiz y papel.

•Qué tipos de intervenciones del colaborador experto promueven el mejoramiento de las habilidades para estimar de los estudiantes.

Antecedentes:

Las investigaciones sobre cálculo estimativo han sido abundantes en los últimos veinte años, pero han tratado fundamentalmente los casos de números enteros y decimales (Sowder, 1992). Por otra parte, dichas investigaciones han indagado la capacidad de estudiantes para resolver problemas de estimación de manera independiente; en este estudio se investiga el desarrollo que alcanzan los estudiantes bajo la guía de un experto al resolver problemas de división de fracciones.

Reys et al. (1982) encontraron que los alumnos de todos los grados de educación básica utilizan las siguientes estrategias de estimación en situaciones que involucran las operaciones básicas con enteros, decimales y porcentajes: operación frontal, redondeo, promediación, números compatibles y números especiales; de éstas, la de promediación es la única que no se usa en los problemas de división.

Flores et al. (1990) aplicaron un examen de estimación a 177 alumnos de segundo grado de secundaria y escogieron al 5% que obtuvo las mejores calificaciones (8 alumnos) para las entrevistas en que basan su reporte. Una de las conclusiones obtenidas es que la falta de comprensión conceptual limitó severamente la habilidad de los alumnos para estimar con fracciones. Así, en el problema 12/13 + 7/8, sólo un alumno notó la proximidad de cada sumando a 1 y estimó la suma como 1 3/4, en tanto que los siete restantes aplicaron mentalmente el algoritmo de lápiz y papel enseñado en la escuela y la mayoría de las veces usaron una versión errónea.

Método:

Nuestro trabajo se realizó con siete alumnos de primer grado de una secundaria pública del Distrito Federal, los cuales fueron elegidos de modo que sus perfiles fueran distintos con respecto a los resultados obtenidos en un Cuestionario de conceptos aritméticos básicos que se les aplicó. Todas las entrevistas se condujeron en las dos semanas siguientes a la aplicación del Cuestionario.

Las entrevistas individuales tuvieron como base una colección de 28 problemas de división de fracciones, separados en cuatro bloques; dos bloques modelan situaciones de medidas iguales y otros dos, situaciones de razones. Para cada tipo de situación hay un bloque de divisiones partitivas y otro de divisiones tasativas.

En la constitución de los bloques de problemas se eligió un ejemplo paradigmático y se variaron los tipos de números involucrados. Se supuso que esta decisión permitiría que el análisis dejara de lado las dificultades que presenta al alumno el cambio de contexto y se centrara principalmente en los tipos de división (partitiva y tasativa), en los tipos de situaciones (medidas iguales y razones) y en los números involucrados.

La entrevista consistió en plantear uno a uno los problemas de cada bloque, procurando que el trabajo con los alumnos tuviera un carácter más de colaboración que de enseñanza; esto es, se explicaron únicamente los conceptos que iban requiriendo; además se tuvo cuidado de no caer en exposiciones largas y exhaustivas.

Resultados.

Conceptos numéricos. Los alumnos fueron capaces de utilizar (la mayoría de ellos con ayuda) 34 conceptos numéricos para resolver los problemas propuestos. Estos conceptos son de dos tipos: *conceptos básicos*, indispensables para entender las situaciones que plantean los problemas de división de fracciones y *conceptos secundarios*, que implican el manejo de los conceptos básicos.

Los conceptos básicos son los de división partitiva y tasativa, y los de fracción y mixto. En este punto cabe hacer algunos señalamientos: el hecho de que los alumnos no tuvieran dificultades para entender un problema como: "Una tela de 30 metros se corta en seis trozos iguales. ¿Cuánto mide cada trozo?", que involucra una división partitiva con enteros, pero sí los tuvieran al cambiar el dato del dividendo por una fracción: "Una tela de 3/4 de metro se corta en tres trozos iguales. ¿Cuánto mide cada trozo?", obligó a distinguir entre varias categorías de división partitiva: un entero entre un entero, una fracción entre un entero, etc.; algo similar ocurrió con el concepto de división tasativa. Del mismo modo, el hecho de que hubiera alumnos que manejaran el símbolo 2/3 en "situaciones de pastel", pero que tuvieran dificultades al momento de usar esa noción para entender un problema que involucrara como dato 2/3 de kg, hizo que se asignaran significados distintos a los conceptos de fracción en abstracto y fracción en contexto; algo similar ocurrió con los conceptos de mixto en abstracto y mixto en contexto.

Los conceptos secundarios se utilizan en cuatro momentos distintos del proceso de estimación: a) en la elaboración de estrategias de estimación; b) en la elaboración de ajustes cuantitativos; c) al efectuar ajustes cualitativos (conceptos *argumentativos*) y d) al ejecutar las estrategias de estimación y de ajuste cuantitativo (conceptos *operativos*).

Estrategias de estimación. Los alumnos utilizaron un total de trece estrategias para resolver los problemas de división de fracciones que se les plantearon, ocho de ellas, basadas en las de Reys, se apoyan en las formas de producir números sencillos (redondeo, truncamiento y sustitución), tres se apoyan en el cálculo mental, una es de tipo cualitativo y otra más se apoya en el razonamiento proporcional. Se describen en seguida estos cuatro grupos de estrategias.

1) En este trabajo, los cuatro tipos de estrategias detectadas por Reys (1982) se han subdividido en ocho. Se ejemplifica en seguida la manera en que un estudiante utilizó algunas de ellas:

Problema: *Una lancha recorre 100 1/2 km en 2 1/2 horas. ¿Qué distancia recorre en una hora?*

Estrategia de Operación frontal:

A: *Serían 100 km entre 2 son 50. Pero son 2 1/2 horas.*

Estrategia de redondeo de divisor mixto a entero:

E: *Has dicho que si fueran 2 horas, recorrería 50 km. Supón ahora que son...*

A: *3. Serían 33 km en una hora.*

E: *Pero no son ni 2 ni 3, sino 2 1/2 horas. Entonces...*

A: *Serían 40 km en una hora.*

E: *Compruébalo.*

A: *Son 40, 80, 100 y como son 100 km y medio, sería un poco más de 40 km por hora.*

2) Son tres estrategias con una tendencia a obtener resultados exactos, tendencia que se manifestó en el uso de procedimientos más próximos al cálculo mental que al estimativo; las utilizaron sólo los alumnos que tenían un buen dominio de los conceptos numéricos. En seguida se ilustra el uso de una de ellas:

Problema: *Una llave de agua da 3/4 de litro por minuto. ¿En cuántos minutos da 11 3/4 litros?*

Estrategia de Cambio de dividendo mixto a fracción con denominador igual al del divisor fraccionario:

A: *Convertiría 11 3/4 en cuartos y serían 47/4, y vemos cuántas veces cabría 3/4 en 47/4 y lo que nos dé sería el resultado. Aproximadamente 15 minutos.*

3) Es una estrategia, que llamamos Estimación Cualitativa, que se observó en la resolución de uno de los problemas planteados. Con objeto de explicar con claridad en qué consiste esta estrategia, se enuncia a continuación el problema de referencia: "*Una lancha recorre 27 9/10 km en 3/4 de hora. ¿Qué distancia recorre en una hora?*" Ante ese problema, los estudiantes se vieron prácticamente imposibilitados para utilizar otra que les permitiera siquiera una aproximación al resultado; sólo manifestaron tener idea del *sentido* o *dirección* del resultado (más de 27 9/10 km), de ahí el nombre que se le asignó.

4) Es una estrategia en que predomina el razonamiento proporcional. Los estudiantes la utilizaron para resolver el problema anterior, previa inducción del entrevistador para que lo hicieran, inmediatamente después de haber usado la estrategia de Estimación Cualitativa.

Intervenciones del entrevistador. Este estudio se basó principalmente en el uso de entrevistas, mediante las cuales se trató de indagar la capacidad de utilización espontánea de estrategias de estimación para resolver problemas de división de fracciones, la de elaborar éstas con la ayuda de sugerencias o explicaciones de un experto, así como la posibilidad de aprender dichas estrategias. El sistema de interacción implícito en esta modalidad de entrevista está ligado al concepto vigotskiano de zona de desarrollo próximo (1979). Dos resultados importantes a este respecto son los siguientes:

1. Fue posible crear una zona de desarrollo en los niños para realizar estimaciones mediante el empleo de formas de producir números sencillos. El tamaño de esa zona dependió principalmente de los antecedentes conceptuales con que contaban los niños.

2. Hubo dos elementos que fueron comunes en la creación de zonas de desarrollo para cada niño:

a) Que el entrevistador los indujera a centrar su atención en no tratar de obtener resultados exactos, sino aproximados.

b) Que el entrevistador mostrara el uso de una estrategia de estimación elemental, la cual normalmente implicó el redondeo de una fracción o de un mixto a entero.

Sugerencia para la enseñanza. Como sugerencia para la enseñanza se podría considerar el siguiente hallazgo que parece importante: si bien los grupos escolares están constituidos por alumnos que tienen distintos niveles de desarrollo intelectual y de conocimientos, y es prácticamente imposible trabajar en una "zona" común, en el presente estudio se localizó un punto a partir del cual puede iniciarse la planeación y desarrollo de la enseñanza del cálculo estimativo con fracciones.

En este punto están presentes los siguientes conceptos numéricos fundamentales: Fracción y mixto en contexto, Fracción y mixto en abstracto, Tamaño de una fracción y de un mixto.

Con estos conceptos pueden armarse estrategias de estimación útiles para resolver una diversidad de situaciones problemáticas como: Operación frontal, Redondeo de dividendo mixto a entero, Redondeo de divisor mixto a entero, Cambio de dividendo y divisor mixtos a enteros compatibles y Redondeo de divisor fraccionario a la unidad.

Referencias bibliográficas:

- **Flores, A., Reys, B. y Reys R.** (1990). Desempeño y estrategias en la estimación en operaciones aritméticas. *Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- **Reys, R., Bestgen, B., Rybolt, J. y Wyatt, J.** (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*. 12 (3), (pp.182-201).

Una colección de ejercicios para desarrollar la habilidad de cálculo numérico

Santiago Ramiro Velázquez
Universidad Autónoma de Guerrero, México

Resumen:

Este trabajo forma parte de una investigación sobre la enseñanza de los dominios numéricos en la escuela secundaria mexicana, concluida en 1996.

En este artículo se presenta una colección de ejercicios que puede contribuir al desarrollo de la habilidad de cálculo numérico en los alumnos, que contiene una gran variedad de clases de ejercicios y las propiedades que deben caracterizarlos, tendentes a desarrollar en los escolares una educación matemática de acuerdo a las exigencias de los tiempos modernos.

Introducción:

La enseñanza de los dominios numéricos en la escuela secundaria mexicana constituye un aspecto importante dentro de la asignatura Matemática, por sus potencialidades para el desarrollo de la habilidad de cálculo numérico encaminada a la solución de problemas. Con lo que se puede contribuir al desarrollo de formas de actuar y de pensar que aseguren a los alumnos, un desempeño exitoso en su vida laboral y social.

Para desarrollar la habilidad de cálculo numérico es necesaria una colección de ejercicios con potencialidades para este fin, que constituya una guía para el docente, ya sea porque la apliquen como se presenta o se apoyen en ella para elaborar su propia colección.

Planteamiento del problema:

Los alumnos que ingresan a la escuela secundaria Mexicana en algunas partes de la República, presentan deficiencias en la formación de conceptos, en el desarrollo de la habilidad de cálculo numérico y en la solución de problemas en el contenido dominios numéricos. Al terminar la educación secundaria esta situación persiste, así lo constata el diagnóstico realizado que incluye un análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de pruebas pedagógicas.

Una de las causas de este problema es la falta de una estructuración didáctica, sistematizada y generalizada de estos contenidos, lo que trae como consecuencia una actuación puntual y mecanicista de los alumnos. Por esta razón es necesario estructurar una colección de ejercicios para contribuir al desarrollo de la habilidad de cálculo numérico, como parte de una concepción de la enseñanza de los dominios numéricos.

Algunos fundamentos teóricos:

Esta colección de ejercicios se estructura en base a los siguientes fundamentos teóricos: Teoría de la actividad (Leontiev, A.1979) donde se hace un estudio de la actividad docente. En el que se demuestra que las acciones de los alumnos se desarrollan de acuerdo a las etapas de orientación, ejecución y control. Estas etapas se entrelazan conformlando una unidad. Por su parte la Teoría de la formación por etapas de las acciones mentales (Galperin, Y.1987) explica como se forman las acciones de los educandos pasando por las etapas: material o materializada, verbal e intelectual.

Considerando estas teorías se estructura un proceso de enseñanza aprendizaje de los dominios numéricos en la escuela secundaria mexicana, del que forma parte el trabajo con los ejercicios de cálculo numérico. (Velázquez,S.1996).

En esta concepción de la enseñanza de los dominios numéricos en la escuela mexicana, se hace una estructuración didáctica de la habilidad de cálculo numérico. Esta contiene un sistema de acciones y operaciones que la conforman , un proceder didáctico para su desarrollo y la colección de ejercicios para su instrumentación en la escuela. Las acciones son: identificar la estructura del cálculo a realizar, estimar el resultado, simplificar el cálculo, realizar las operaciones y controlar los procesos y los resultados.

Un aspecto del proceder didáctico considera la necesidad de tener escrito un procedimiento generalizado para calcular, a fin de que los alumnos se orienten en plano material. Este procedimiento se resume en la forma siguiente

Se propone que los alumnos razonen en voz alta, pasando paso a paso al plano mental

- ¿Por dónde inició el cálculo?
- ¿Cuál puede ser un resultado estimado?
- ¿Puedo expresar el cálculo en forma mas sencilla?
- ¿Qué vía aplico?
- ¿Con cuántas cifras calculo?
- ¿Es correcta la respuesta?
- ¿Existe otra vía racional?
- ¿Es posible utilizar esta vía en otros casos?

En estas explicaciones se reflejan las potencialidades que tiene la enseñanza de los dominios numéricos, para el desarrollo intelectual de los alumnos. En particular, el sistema de acciones y operaciones y el procedimiento generalizado para calcular constituyen dos momentos de una base orientadora para los escolares. Uno de los propósitos de esta base orientadora, es que el alumno comprenda la tarea a realizar y se desempeñe con éxito, considerando que la acción de comprender es básica para el desarrollo intelectual, como lo afirma (Fariñas, G.1995) "comprender puede ser inicio y fin del pensamiento".

Estas posiciones se concretan en la colección de ejercicios, para ser instrumentada en la escuela.

Además, en este trabajo se asume la definición de ejercicio de la enseñanza de la matemática dada por (Miuller, H,1987) "Es una exigencia para actuar caracterizada por el objetivo, el contenido y las condiciones de ejecución.

El objetivo de un ejercicio consiste en transformar las situaciones conocidas para cumplir con la exigencia planteada, el contenido se refiere a los aspectos matemáticos que intervienen y las condiciones de ejecución están dadas por las exigencias que se plantean y tienen relación con el grado de dificultad del ejercicio.

Para que la ejercitación cumpla con sus funciones, es necesario que el alumno asuma un papel activo. Es decir, que participe en la búsqueda y planteamiento de los ejercicios y problemas y exprese sus intereses, necesidades y objetivos al respecto. Para lograr esta participación activa, el profesor debe realizar una intensa actividad de dirección encaminada al trabajo independiente y creativo de los educandos.

Esta actividad de dirección se puede realizar, tomando como guía la Teoría de la Actividad. Esta teoría ofrece por una parte, una explicación de como aprende el alumno y por otra, un proceder didáctico para el docente.

A continuación se presentan los tipos de ejercicios que no pueden faltar si se pretende desarrollar la habilidad de cálculo numérico.

Clases de Ejercicios:

I. Ejercicios de cálculo en general
- ♦ De cálculo mental
- ♦ De estimación
- ♦ De cálculo simple (exacto)
- ♦ De cálculo más complejo (exacto)
- ♦ De cálculo aproximado
- ♦ De carácter histórico

II. Ejercicios de solución de ecuaciones e inecuaciones

III. Ejercicios con texto

IV. Solución de problemas

V. Ejercicios desarrolladores y recreativos

Tomar en cuenta:
- Formas variadas de representar los números
- Ejercicios sin solución, de solución única y de varias soluciones
- De respuesta negativa, cero y positiva
- De operaciones combinadas
- Variedad de la ejercitación
- Ordenes diferenyes para el mismo ejercicio
- Que sean integradores

Resultados:

Esta colección de ejercicios fue puesta en práctica en una experiencia pedagógica, realizada en dos escuelas secundarias del estado de Guerrero. Los resultados reflejan que dicha colección tiene potencialidades para desarrollar la habilidad de cálculo numérico y la solución de problemas. Es decir, con la aplicación de esta colección se puede contribuir al desarrollo de las habilidades esenciales en esta temática.

Los criterios de los profesores que participaron en la experiencia pedagógica, coinsiden con los de asistentes a la presentación de este trabajo en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 11). En el sentido de que esta colección de ejercicios es de iterés para la comunidad de Matemática Educativa y aplicable en las condición de la Escuela Mexicana.

Por ejemplo, los alumnos de primer grado tienen un desempeño exitoso en el problema de la herencia (Un hombre cuya esposa está por dar a luz, muere, dejando en su testamento las siguientes instrucciones: si nace un varón le corresponde el doble de la herencia que reciba la madre, si nace una niña le corresponde la mitad de la herencia que reciba la madre. Nacen mellizos de diferente sexo. ¿Cómo debe repartirse la herencia para que se cumplan las instrucciones del testamento?). Dichos alumnos manifiestan formas de orientarse en la búsqueda de la idea de solución. Ilustran y modelan revelando que comprenden el problema, dicen: el hijo debe recibir el doble de lo que reciba la madre, la hija debe recibir la mitad de lo que reciba la madre, esto lo expresan en un modelo como el siguiente:

$$\overbrace{\underbrace{\frac{1}{7}\quad\frac{1}{7}}_{\text{madre}}\quad\underbrace{\frac{1}{7}\quad\frac{1}{7}\quad\frac{1}{7}\quad\frac{1}{7}}_{\text{hijo}}\quad\underbrace{\frac{1}{7}}_{\text{hija}}}^{\textit{HERENCIA}}$$

Así resuelven el problema y formulan la respuesta correcta.

Referencias Bibliográficas:

- **CONALTE**, (1991) *Perfiles de Desempeño para Preescolar, Primaria y Secundaria*. SEP, México.
- **Consejo Nacional de Profesores de Matemática**, (1991). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*, edición en castellano, Sociedad Andaluza de educación matemática, Sevilla.
- **Farillas, G.** (1995). *Maestro una Estrategia Metodológica*, Pueblo y Educación, Habana.
- **Guzmán, M**, (1991). *Tendencias Innovadoras de la Enseñanza de la Matemática*, Labor, Madrid.
- **Leontiev, A.** (1979). *La actividad en Psicología*, Pueblo y educación, Habana.
- **Mitjans, A.** (1995). *Creatividad personalidad y educación*, Pueblo y Educación, Habana.
- **Muller, H.** (1987). *Aspectos metodológicos del trabajo con ejercicios en la enseñanza de la Matemática*, ICCP, Habana.
- **Núnez, R.** (1995). Contribución a la formación del pensamiento matemático, publicación de la *Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de Profesores e invetigación en Matemática Educativa*, Habana.
- **Rizo, C. y Campistrous, L** (1993). *Lógica y Procedimientos Lógicos en la Enseñanza de la Matemática*, impresión ligera, Habana.

Un criterio de divisibilidad en los enteros

Armando Sepúlveda López Departamento de Matemática Educativa de la UMSNH
José Gerardo Tinoco Ruiz. Esc. de C. Físico-Matemáticas "Luis Rivera Gutiérrez" de la UMSNH

Resumen: El estudio de los números primos se inicia muy temprano en la educación matemática. A lo largo de ella se trabaja con éstos a diferentes grados de profundidad, dependiendo del nivel de estudios y de la carrera, y directa o indirectamente, se estudia el concepto de divisibilidad y el Teorema Fundamental de la Aritmética, cuyo aprendizaje y maduración contribuye al entendimiento de otros contenidos cuya estructura es más general y compleja. De hecho, desde la antigüedad los números primos han mantenido ocupada la mente de distinguidos matemáticos y el decidir cuando un número es divisible entre otro, así como la presentación de la "regla" (criterio o teorema) lo más simplificada posible, ha sido uno de los grandes retos en este campo de las matemáticas.

Desde la educación elemental aprendemos fácilmente los criterios de divisibilidad del 2 y del 5. También se introducen con relativa facilidad los criterios del 3, quizás del 11; pero los problemas empiezan con los criterios del 7, del 13, del 17, etc., ya sea porque su presentación es más elaborada, o bien, porque en los pocos libros donde se pueden consultar, aparecen enunciados de manera muy artificiosa y, en ocasiones sin explicación lógica alguna, lo que hace que aun los educadores prefieran no presentarlas a sus alumnos. En efecto, el hecho de que cada criterio represente un conjunto de pasos a seguir, que aparentemente no tienen nada que ver con los correspondientes a otro criterio, hace dificil al aprendizaje de éstos.

En este trabajo, presentamos una proposición general que sirve para establecer el criterio de divisibilidad entre cualquier número primo, a excepción del 2 y del 5 los cuales, por otra parte, no requieren de gran explicación debido a su sencillez. La característica principal de este criterio, además de su generalidad, es que es muy simple. Para la demostración sólo se requiere de las cuestiones fundamentales sobre el anillo de números enteros. También se muestran ejemplos de su aplicación. Para contextualizar, se presentan las definiciones y proposiciones básicas utilizadas, así como algunos de los criterios comúnmente conocidos. La base del criterio es el siguiente:

Teorema 1.- Sea N entero positivo con representación decimal

$$N = a_n \; a_{n-1} \; \ldots \; a_2 \; a_1 \; a_0$$

y p un primo diferente de 2 y 5. Sea q positivo tal que

$$10 \mid (qp-1) \qquad (1)$$

y

$$k = \frac{qp-1}{10} \qquad (2)$$

Sean ahora

$$M_1 = \frac{N - a_0}{10} \tag{3}$$

y

$$N_1 = M_1 - ka_0 \tag{4}$$

Entonces, $p \mid N$ *si y sólo si* $p \mid N_1$

Antes de dar la demostración, conviene aclarar con algunos ejemplos lo que nos dice el teorema.

Ejemplo 1.- Sea $N = 95361$ *y* $p = 3$. q será tal que al multiplicarlo por p nos dé como resultado un número cuya cifra de las unidades sea 1; éste es el significado de (1). Para nuestro ejemplo, q puede ser cualquier número terminado en 7; el más pequeño de ellos es el 7 mismo. Tomaremos pues $q = 7$. En este caso

$$qp - 1 = (7)(3) - 1 = 20$$

Así pues $k = 2$, dicho de otra manera: k es lo que resulta al quitarle la cifra de las unidades a $qp = 21$; esto es lo que nos dice (2).

Ahora,

$$M_1 = \frac{95361 - 1}{10} = 9536$$

o sea que M_1 se obtiene de N quitándole la cifra de las unidades; éste es el significado de (3).

Finalmente (4) nos dice que

$$N_1 = M_1 - ka_0 = 9536 - (2)(1) = 9534$$

y la afinación del teorema es que 95361 es divisible entre 3 si y sólo si 9534 lo es.

Nótese que hemos reducido el problema a uno más simple. De hecho, si aplicamos el teorema otra vez, ahora a 9534 (sin necesidad de calcular nuevamente k), tendremos que:

3 divide a 9534 si y sólo si 3 divide a 953 - (2) (4) = 945

Nuevas aplicaciones del teorema nos dicen que

3 divide a 945 si y sólo si 3 divide a 94 - (2) (5) = 84

y esto, si y sólo si 3 divide a 8 - (2) (4) = 0.

Como 0 es divisible entre 3 (y entre cualquier otro número), se concluye que 3 divide a 95361.

Antes de dar más ejemplos, cabe hacer las siguientes observaciones:

1. Para cada primo p, diferente de 2 y 5, se puede encontrar el entero positivo q del teorema. Esto es claro, ya que tales primos terminan en 1, 3, 7 ó 9. Los correspondientes valores de q deben terminar en 1, 7, 3 ó 9.

2. Como ya dijimos, q no está determinado de manera única. En el ejemplo anterior, también hubieran servido 17, 27, 37 y en general

cualquier entero terminado en 7. Sin embargo, el elegir un q más grande nos hubiera complicado los cálculos. Se recomienda entonces elegir q lo más pequeño posible.

3. Todo el proceso, una vez determinado k, se puede escribir de una manera abreviada y sistemática. En nuestro ejemplo, los cálculos se pueden arreglar de la siguiente manera:

$$N = 95361,\ p = 3$$

$$q = 7,\ pq = 21,\ \text{por lo tanto } k = 2$$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 9 & 5 & 3 & 6 & \underline{1} \\
- & & & & 2 & \\
\hline
 & 9 & 5 & 3 & \underline{4} & \\
- & & & 8 & & \\
\hline
 & 9 & 4 & \underline{5} & & \\
- & 1 & 0 & & & \\
\hline
 & 8 & \underline{4} & & & \\
- & 8 & & & & \\
\hline
 & 0 & & & &
\end{array}$$

Ejemplo 2.- Veamos si 206567 es divisible entre 29.

$$N = 206567,\ p = 29$$

$$q = 9,\ pq = (29)(9) = 261,\ \text{por lo tanto } k = 26$$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & 2 & 0 & 6 & 5 & 6 & \underline{7} \\
- & & & 1 & 8 & 2 & \\
\hline
 & 2 & 0 & 4 & 7 & \underline{4} & \\
- & & 1 & 0 & 4 & & \\
\hline
 & 1 & 9 & 4 & \underline{3} & & \\
- & & 7 & 8 & & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 6 & & &
\end{array}$$

Como 29 divide a 116, concluimos que también divide a 206567.

Ejemplo 3.- Apliquemos el criterio para determinar si 29 divide a 3510. El valor de k es el mismo que en el ejemplo anterior; esto es, $k = 26$.

$$N = 3510,\ p = 29$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & 3 & 5 & 1 & \underline{\mathbf{0}} \\
- & & & 0 & \\
\hline
 & 3 & 5 & \underline{\mathbf{1}} & \\
- & 2 & 6 & & \\
\hline
 & & 9 & &
\end{array}$$

Como 29 no divide a 9, tampoco divide a 3510.

Ejemplo 4.- Determinemos si 41 divide a 19993035.

$$N = 19993035,\ p = 41$$

$$q = 1,\ pq = (41)\,(1) = 41, \text{ por lo tanto } k = 4$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & 9 & 9 & 9 & 3 & 0 & 3 & \underline{\mathbf{5}} \\
- & & & & & & 2 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 9 & 9 & 9 & 2 & 8 & \underline{\mathbf{3}} & \\
- & & & & & 1 & 2 & & \\
\hline
 & 1 & 9 & 9 & 9 & 1 & \underline{\mathbf{6}} & & \\
- & & & & 2 & 4 & & & \\
\hline
 & 1 & 9 & 9 & 6 & \underline{\mathbf{7}} & & & \\
- & & & 2 & 8 & & & & \\
\hline
 & 1 & 9 & 6 & \underline{\mathbf{8}} & & & & \\
- & & 3 & 2 & & & & & \\
\hline
 & 1 & 6 & \underline{\mathbf{4}} & & & & & \\
- & 1 & 6 & & & & & & \\
\hline
 & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

y como 41 divide a 0, se cumple que 41 divide a 19993035.

Ejemplo 5.- Veamos si 89 divide a 762819.

$$N = 762819,\ p = 89$$

$$q = 9,\ pq = (89)\,(9) = 801, \text{ por lo tanto } k = 80$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 7 & 6 & 2 & 8 & 1 & \underline{9} \\
- & & & 7 & 2 & 0 & \\
\hline
 & 7 & 5 & 5 & 6 & \underline{1} & \\
- & & & 8 & 0 & & \\
\hline
 & 7 & 4 & 7 & \underline{6} & & \\
- & 4 & 8 & 0 & & & \\
\hline
 & 2 & 6 & 7 & & &
\end{array}$$

y como 89 divide a 267, se concluye que 89 divide a 762819.

Referencias Bibliográficas:

- **Cárdenas, H., Lluis, E., Raggi, F., Tomás, F.** (1982). *Algebra Superior*. Primera Edición. Editorial Trillas, México, D.F.
- **Baldor, A.** (1996). *Aritmética*. Publicaciones Cultural, México.
- **Vorobiov, N.** (1975). *Criterios de Divisibilidad. Lecciones Populares de Matemáticas.* Editorial MIR, Moscú.

PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Un acercamiento constructivista a los conceptos del Álgebra

Asuman Oktaç, Raúl Cuellar, Pricilíano Aguilar
CINVESTAV-IPN, México

Sobre el constructivismo, von Glasersfeld (1985) nos dice :

> *Desde un punto de vista constructivista, el aprendizaje no es transferible, ni la comunicación un traspaso. Conocimiento y competencia son productos de la organización conceptual de la experiencia de un individuo. Por lo tanto, el papel de un profesor no es un expediente de verdades, sino el de ayudar y guiar al estudiante en la organización conceptual de ciertas áreas de la experiencia.*

Underhill (1981) hace algunos planteamientos sobre el aprendizaje constructivo:

1. El conflicto cognitivo y la curiosidad son los dos mecanismos principales que motivan a los alumnos para aprender.
2. La interacción con los compañeros es un factor principal para producir el conflicto cognitivo.
3. El conflicto cognitivo induce actividad reflexiva (metacognitiva).
4. Reflexión es el factor principal que estimula reestructuración cognitiva.
5. Las afirmaciones (1), (2), (3), (4) forman un ciclo.
6. El ciclo siempre ocurre dentro y se retroalimenta de la experiencia del alumno.
7. Este ciclo habilita a los alumnos; es decir los pone en control de su propio aprendizaje.

El álgebra lineal y el álgebra abstracta tradicionalmente han sido enseñadas usando un formato de conferencia donde el profesor suministra definiciones, teoremas, pruebas en tanto los estudiantes trabajan los ejercicios del texto.

En este taller, se introdujo a los participantes un acercamiento alternativo donde se estudiaron ciertos conceptos del álgebra lineal y abstracta a través de situaciones matemáticas o problemas. Los participantes trabajaron en grupos cooperativos para crear una experiencia de participación activa.

El taller fue diseñado para profesores que imparten clases en álgebra lineal o álgebra abstracta introductoria en nivel superior o bachillerato, o personas interésadas en aprender acerca de un acercamiento constructivista de la enseñanza.

La secuencia de actividades presentada está basada en aritmética modular, donde se requiere que los participantes encuentren y utilicen propiedades tales como inversos multiplicativos dentro de la aritmética modular en el contexto de la criptografía.

Se presentó a los participantes un problema de criptografía en el que se require codificar y decodificar. Primero, se explicó a los participantes una manera de codificar mensajes usando aritmética modular y matrices. Después, los estudiantes formaron equipos de trabajo, eligieron una palabra y la codificaron. Luego, los equipos intercambiaron los mensajes ya codificados y trataron de decodificar el mensaje de uno de los otros equipos. Resolver este problema requiere encontrar la inversa de la matriz de codificación dada inicialmente, tomando en cuenta que sus entradas están en la congruencia módulo 27; o bien, resolver un sistema de ecuaciones en la misma aritmética. Antes de esta actividad, los estudiantes no estaban enterados de las técnicas de decodificación.

En el proceso, los participantes enfrentaron dificultades con el paso del contexto de los números reales a un contexto de aritmética modular. La mayoría de los equipos no pudieron decodificar la palabra. Cuando surgió esta dificultad, se aplicó una secuencia para enfrentar la dificultad con los conceptos de operaciones, inversos y soluciones de ecuaciones de aritmética modular, así como las condiciones necesarias para la existencia de la solución del sistema obtenido.

Al finalizar la secuencia, la mayoría de los participantes lograron identificar sus errores en el proceso y pudieron codificar la palabra.

Los instructores solo participaron durante las sesiones para aportar las definiciones solicitadas y clarificar las ideas expresadas por los participantes.

Estas actividades y secuencias se aplicaron durante los primeros dos días del taller, haciendo una recapitulación al final.

El tercer día se discutió acerca del constructivismo, escuelas diferentes de la misma teoría, aprendizaje cooperativo, implicaciones para los profesores que imparten cursos, y de las dificultades con la implementación de un acercamiento constructivista en la clase.

Fueron cerca de 70 participantes de varios países, el 40% tenía formación de matemático y los restantes de profesiones afines, el 100% imparte clases de álgebra y 75% en el nivel superior. Una encuesta aplicada después del taller mostró que los profesores se sintieron motivados en general y la mayoría desearía que los cursos fueran de mayor duración.

Muchos maestros están conscientes de la importancia que tiene la participación de sus estudiantes en las actividades y discusiones durante las clases. Sin embargo, la escasez de oportunidades de capacitación sobre los métodos constructivistas, de literatura y materiales nos induce a crear actividades donde ellos mismos experimenten el aprendizaje con éstos métodos.

Referencias Bibliográficas:

- **Von Glasersfeld, E.** (1985). Learning as a Constructive Activity. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Hillsdale, NJ: Erlbaum, (pp. 3-17).
- **Underhill, R.** (1981). Two Layers of Constructivist Curricular Interaction. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Kluwer, Dordrecht, (pp. 229-248).

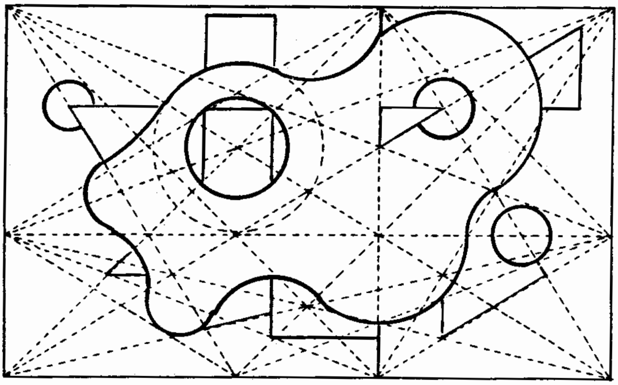
PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

Curso: El pensamiento geométrico en la educación básica.

Eréndira Valdez Coiro
Universidad Pedagógica Nacional, Ajusco, México D.F.

El curso convocaba a los académicos que estuvieran interesados en el nivel básico. Participaron en una experiencia de construcciones con regla y compás que sirvió de referente para dialogar sobre lo conceptual y lo operacional en el ámbito de la geometría.

El diseño propuesto para la tarea de trazo fue un diseño sobre un rectángulo áureo:



Análisis: A partir de la primera vista, se produjo una imagen sincrética en la que los participantes perciben un conjunto armónico de imágenes que forman el diseño completo. Sin embargo, pasado la primera impresión, empezaron a analizar partes que aislaban del total para caracterizarlas a partir de su conocimiento geométrico.

Entre otras, emergieron relaciones de paralelismo perpendicularidad, circunferencias, ángulos,... un poco menos espontánea la proporción áurea del marco y la curva principal tiene resultado de la continuidad entre arcos de circunferencia que tenían diferente radio y centro.

Una situación interesante fue el hecho de "hacer ver" el trazo auxiliar, a partir de la observación del producto final que se quería obtener. Por limitaciones de tiempo se mostraban imágenes que daban cuenta de los pasos que seguirían en el trazo, y cada participante trabajaba antes de que se mostrara la siguiente, para analizar, establecer hipótesis sobre las relaciones posibles y verificarlos en sus hojas de trabajo.

Los trazos que servían para delinear rectas y curvas salían de un sencilla malla que podía hacerse explícita en trazos secundarios a partir del traslado de la distancia del lado menor del rectángulo en el lado mayor, desde dos vértices consecutivos, y nuevamente, del rectángulo áureo que se formaba en el interior del primero, se completaron las referencias para luego trazar los diagonales necesarias para formar una malla que daría los puntos de referencia para la ubicación y trazo de las figuras finales.

Los procesos de *análisis y síntesis* de la figura obligaban a los dibujantes a "entrar y salir" del trazo propuesto. Si bien se trataba de reconstruir un trazo muy sencillo, la lectura de los datos necesarios para hacer la réplica permitió diferenciar ambas operaciones, por momentos. La *ley de irradiación*: el paso de lo extensivo a lo intensivo se comentó a partir de esta experiencia.

El *análisis sensorial* de imágenes; y el *conceptual* con el lenguaje, entraron en juego según los recursos que cada quien tuvo, y quiso desplegar, en su grupo de trabajo. Cuando se pidió que hicieran explícitos los elementos esenciales que sugería en la figura pudo ponerse en evidencia los diferentes acercamientos con los que se hizo el trazo, y que dan cuenta del proceso cognitivo. Destaca que este se forma con referentes conceptuales que en el discurso, como podrían compartirse, pero al ponerse en juego para la reproducción del trazo no siempre estuvieron disponibles, ni apartaron posibilidades reales de acción para operar sobre la figura, por ejemplo la sección aúrea, que casi todos aceptaron conocer, pero sólo unos cuantos pudieron percibir en la figura inicial, y reconocer en sus elementos al hacer los trazos en la hoja de trabajo [1].

En relación con el proceso de *síntesis* se destacaron las nuevas posibilidades que se generan para evidenciar relaciones que en un momento anterior no se habían hecho explícitas, dando lugar así, a una redefinición conceptual que es producto de las nuevas formulaciones del problema que poco a poco se producen durante la ejecución de la tarea, en cada vuelta análisis y síntesis que los dibujantes hacían al regresar al modelo y salir de él.

El plano de la *abstracción* se abordó cuando el diseño se había terminado, al debatir por pequeños grupos los criterios bajo los cuales se seleccionaban elementos y los soportes conceptuales que permitían tales selecciones. Hubo una interesante charla sobre la diferencia entre la abstracción sensorial, la abstracción científica, y sobre una intersección que de manera casi natural da lugar a la intuición, como espacio de convergencia de ambas. Se hizo explícita la idea de que la intuición se educa, y del cambio en lo perceptual cuando el sujeto cuenta con nuevos elementos para observar su objeto de conocimiento.

Al evaluar las dos sesiones iniciales: la de trazo para hacer la réplica del diseño y la de debate para reflexionar sobre los procesos cognitivos que se produjeron durante la construcción, se puntualizaron elementos conceptuales, sus conexiones, y el resultado de las sesiones como un producto que no estaba radicado en un diseño sino en el proceso de pensamiento y ejecución en el que se generaba... así, el objetivo de aprendizaje se reorientó, y tomó un sentido muy vívido, el hecho de que el

[1] Como actividad complementaria se sugirió que se visitara la Catedral de Morelia, ya que su construcción clásica se hizo precisamente a partir de secciones aúreas

conjunto de operaciones en el ámbito geométrico no era comparable con el proceso completo que llevó al debate y a la generalización de orden didáctico.

La actividad analítico-sintético se conceptualizo en el contexto mismo de su ejecución, para dar lugar a una *generalización* didáctica, más allá de trazos, diseños y medidas... La tarea propuesta fue resolver un problema geométrico, el proceso didáctico quedó explícito y cuando se concluía con la caracterización de una *transferencia*, pudo evidenciarse la forma en que se produjeron las respuestas en la situación problemática concreta del curso.

Encontrar soluciones generalizadas, no bastó, (por ejemplo: trazar diagonales de los cuadriláteros compenetrados en el diseño). Al hacer explícitos los nuevos términos del problema en los que en los que parecían encajar tales soluciones, se avanzó al hacer un análisis de la actuación de cada resolutor en el manejo de las nuevas condiciones del problema que se utilizó como ámbito experimental para poner en juego las posibilidades de resolución que cada quien tenía

Como juicio interesante destacó el hecho de que es el proceso de propia construcción de una solución generalizada el que da lugar a la búsqueda de las nuevas condiciones , y su consideración para hacer pertinente la utilización de tal solución. Visto así, el proceso que lleva a una generalización se recupera como producto cuando se intenta hacer una transferencia .

A pesar de que el curso se había propuesto en dos sesiones de trabajo, casi el 75% de los participantes pidió una sesión más. Durante ella se llevaron al ámbito escolar las conclusiones que se elaboraron en las sesiones anteriores, y se debatió sobre el trabajo escolar que los maestros realizaban en sus centros educativos. Para orientar esta tercer sesión se presentó el siguiente cuadro, que intentaba focalizar la discusión en torno a los problemas sobre construcciones geométricas.

EJECUCIÓN DE TRAZOS, QUE SE TRADUCE EN:	ACCIONES DE TIPO COGNITIVO	PROBLEMAS EN LA REALIZACIÓN DE LA TAREA
1a- Seguimiento de instrucciones.	1b Decodificación, Lenguaje, significados, posibilidades de acción.	1c Anarquía, y especulación de resultados. Conceptos que no siempre se coordinan con las acciones. Escasa motricidad fina.
2a- Análisis y réplica de construcciones	2b- Operaciones de coordinación visual, cognitiva y motriz.	2c Agudeza y creatividad. Motricidad fina. Pérdida de la totalidad figural.
3a- Resolución de problemas de trazo	3b- Intuición. Coordinaciones y observaciones retroalimentadas en análisis y síntesis del gráfico. El insight.	3c Educación de la intuición. Solución: Desglose por pasos, de tipo holístico, o radial a partir de un centro figural conocido.
4a- Demostración y/o validación de resultados en un trazo.	4b- Coordinación de operaciones sobre el objeto a partir de las proposiciones. Anticipación de acciones en esquemas mentales. Insight.	4c Integración de conceptos para hacer la reconstrucción mental de la figura. Análisis de datos. Dinámica figural. Demostraciones por pasos.

Una parte de las reflexiones de canalización considerando este núcleo común como eje de la discusión, y en la otra parte se amplió el espacio-problema hasta lo socio-cultural, en donde aunque hubo comentarios sobre aspectos y factores que rebasaban en mucho nuestras posibilidades reales de acción, se llegaron a establecer algunos lineamientos y estrategias que podrían ser útiles en nuestros desempeños futuros.

El intercambio de experiencias entre colegas, para problematizar sobre nuestra práctica y sugerir formas específicas para transformarla, resultó el producto más valorado del curso.

Referencias Bibliográficas:

- **Barabtarlo, A.** (1994). *La investigación- acción en la formación del profesorado*. Castellanos: México:
- **Carr, W. y Kemmins, S.** (1988). *Teoría crítica de la enseñanza*. Investigación- acción en la formación del profesorado. Barcelona: Siglo XXI.
- **Cantoral, R.** *Un problema de la Educación Matemática: la formación de profesores*. Iberoamérica: México.
- **Kolmogorov, et. al.** (1990). *La matemática: su contenido, método y significado*. México: Facultad de Ciencias- UNAM
- **Moreno, L** (1996). *"Matemáticas y Educación: Matemática Educativa. Hacia una caracterización de la Educación Matemática y la investigación."* México: Iberoamérica.
- **Rubinstein.** *El ser y la conciencia./ Los caminos del pensamiento*. México: Grijalbo.
- **Vigotsky.** (1992). *Pensamiento y lenguaje*. México: Quinto Sol.

Taller: "La enseñanza de áreas y volúmenes mediante lautilización de material concreto"

Anabelle Castro Castro
Grace Damazio Acosta
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Este taller surgió a partir de 1992 como una actividad de extensión de la Sede Regional del Instituto Tecnológico de Costa Rica, con el auspicio de la Vicerrectoría de Investigación y Extensión del Instituto Tecnológico de Costa Rica y la Dirección Regional de Enseñanza del Ministerio de Educación Pública; en respuesta a una necesidad planteada por los educadores de enseñanza primaria.

Tiene como propósito el uso de material, concreto de fácil acceso y dinámico, para el desarrollo de destrezas y la comprensión de conceptos como unidad de área, unidad de volumen, algoritmos utilizados para áreas y volúmenes.

Justificación:

Hasta el momento las metodologías utilizadas en nuestro país se han centrado en darle al estudiante una definición o una fórmula, para luego resolver ejercicios siguiendo patrones de imitación, sin que los estudiantes entiendan a veces lo que están haciendo y estas no se preocupan por desarrollar la capacidad creadora e integradora del estudiante. No se enfatizan los conceptos, pero si los procedimientos sin mucho sentido y una memorización de fórmulas. Esto plantea la necesidad de introducir nuevos enfoques para el estudio de la matemática (Castro y Damazio, 1993).

Segura y Chacón, (1996), indican que los sistemas tradicionales de enseñanza en la educación, no dan al estudiante las herramientas para indagar, analizar y discernir la información, que lo lleve a la verdadera toma de decisiones. Los conocimientos impartidos son más bien atomizados, memorísticos y no fomentan el desarrollo de la iniciativa, la creatividad, ni la capacidad para comunicarse por distintas vías.

El proceso enseñanza-aprendizaje resulta más efectivo cuando el estudiante trabaja con objetos que puede manejar y explotar. La exploración de ideas en lugar de la memorización de terminología, conduce al entendimiento intuitivo de conceptos geométricos. El papel del maestro como facilitador y la experiencia temprana con objetos, ayudan al desarrollo de destrezas. El estudiante necesita de experiencias concretas para llegar a conceptos abstractos.

El Concilio Nacional de maestros de Matemática en su libro de Estándares Curriculares y de Evaluación en Matemáticas, (1989) da énfasis a que la educación en matemáticas debe ser un proceso activo donde el estudiante tenga acceso a este aprendizaje activo. El grupo plantea que la utilización de modelos concretos sirve como herramienta útil en el logro del aprendizaje activo: el estudiante asume un control activo sobre su aprendizaje.

Otras evidencias presentadas indican que la afinidad de profesor y alumno es crucial para que estos últimos tengan éxito en su aprendizaje. Los estudiantes asumen su compromiso si se les involucra activamente, si se les permite opinar, preguntar, consultar con sus compañeros, investigar situaciones matemáticas, discutir y cuestionar ideas matemáticas, que sean de su interés, si se les respeta y guía en la corrección de sus errores, etc. Todas estas consideraciones son necesarias a la hora de crear ambientes, para que estos realmente propicien aprendizaje. (Díaz, 1997)

Esta taller está sustentado bajo los lineamientos de la teoría del constructivismo. Wheatley, (1990), los estudiantes construyen los conceptos mediante la interacción con compañeros y maestros, ya que para él la matemática es una actividad de construcción de modelos y relaciones, no una colección de procedimientos para ser memorizados y practicados; y en donde la visualización espacial es una herramienta fundamental para ello. De igual manera. Wise y Okey (1983), plantean que los maestros y profesores serán mejores en su función docente cuando más logren promover actividades y discusiones entre los estudiantes, de las experiencias hechas por ellos para que así descubran por si mismos los conceptos; para lo cual deben de improvisarse ambientes de aprendizaje que permitan a los estudiantes construir sus propias ideas, facilitándoles problemas que los estimulen a hacer sus construcciones (Wheatley, 1989).

Objetivos:

Proporcionar al docente, instrumentos metodológicos y experiencias didácticas que al ser utilizadas por sus alumnos, facilitará la construcción de conceptos básicos de geometría plana, áreas y volúmenes.

Promover, en los educadores participantes, la discusión y análisis sobre los otros usos del material utilizado para la construcción, por parte del estudiante de los conceptos y fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes.

Descripción de las actividades:

Con base en los supuestos teóricos en que se orienta el taller y el marco constructivista en que se fundamentan las experiencias didácticas a desarrollar en el mismo, se promueven tanto la discusión como el análisis entre los participantes, a fin de que comprendan su rol de facilitadores del proceso de construcción de conceptos por parte de sus estudiantes.

Las actividades se desarrollan en subgrupos de tres o cuatro personas. A cada grupo se le hace entrega del material necesario para el desarrollo de cada una de las actividades. Dichas actividades obedecen a uno o más objetivos específicos que para ser logrados se hará necesario el impulsar tareas creativas que guíen a los alumnos a la comprensión de conceptos como:

- área
- unidad de área
- área de cuadriláteros

- triángulo
- trapecio
- rectángulo
- rombo
- Área del círculo: partes del círculo, π, circunferencia, área del círculo

De igual manera es importante el manejo de sólidos para llegar claramente a la noción de volumen sobre todo en las siguientes figuras:

- cubo
- paralelepípedo
- cono
- pirámide
- cilindro
- fórmulas sobre èl volumen de estos sólidos

Una de las características más notables en la enseñanza de la matemática en la escuela primaria es la creciente importancia que se le da al desarrollo de conceptos.

Como no es posible que el alumno adquiera toda la información disponible en el campo de la matemática, la función del maestro debe ser la de posibilitar a los alumnos el desarrollo de habilidades, razonamientos y conceptos que le permitirán cada vez más manejarse por sí mismos, durante toda un vida de aprendizaje.

Para el desarrollo de este taller el educador se convierte en un guía, quien mediante preguntas o sembrando inquietudes en los alumnos, los encamina para que realicen investigaciones o experiencias que los llevarán a obtener respuestas.

Se pretende que sean los alumnos los que realicen una serie de experiencias, sin saber los objetivos que se persiguen pero sí con la idea clara de llegar por sí mismos a la conclusión deseada. Entonces se desea que los alumnos aprendan a:

1. Enunciar conclusiones adecuadas, hacer generalizaciones o construir los conceptos.
2. Describir lo que ven usando sus propias palabras.
3. Esquematizar experiencias destacando lo que tienen de fundamental.
4. Improvisar experiencias complementarias.

Es importante recalcar el hecho de que los niños necesitan exponerse a experiencias que les ayuden a desarrollar la idea de conservación de otros tipos de medición, **ya que no importa lo que les digamos o cuánto los apresuremos, ellos sólo entenderán la idea de la conservación de las medidas o cualquier otro concepto luego de haber participado de muchas experiencias.**

Debe recordarse siempre que se necesita mucha repetición en cada etapa y para cada tema.

Como cierre del taller se espera aprovechar las experiencias de los participantes, para que a cada subgrupo plantee propuestas sobre:

- uso del material para la construcción de los conceptos citados
- la implementación de actividades complementarias en el aula.

Referencias Bibliográficas:

- **Baldor, A.** (1977). *Geometría.* Ediciones Códice S. A. Madrid, España.
- **Barnet, R.** (1971). *Geometría plana con coordenadas.* 1 edición, Editorial McGraw-Hill de México.
- **Boltianski, G.** (1983). *División de figuras en partes menores.* Editorial MIR. Moscú.
- **Kerr, T.** (1987). *Matemática para la familia.* Regints, University of California. Estados Unidos de Norteamérica.
- **Moise, E.** (1969). *Geometría Moderna.* I Edición, Editorial Addison-Wesley. Publishing Company.
- **Peraza, B.** (1989). *Didáctica de la Matemática.* Editorial Texto Ltda. San José, Costa Rica.
- **U.N.E.D.** (1981). *Didáctica de la matemática.* Editorial EUNED, San José, Costa Rica.

Convexos, estrellas y miradores...

Cecilia R. Crespo Crespo[1] ,
Christiane C. Ponteville[2]
Universidad Tecnológica Nacional[1,2]
Instituto Superior del Profesorado "Dr. J. V. González"[1,2]
Universidad de Buenos Aires[1]
Instituto Tecnológico de Buenos Aires[1]

1.- Introducción:

La Geometría de Convexidad se diferencia del resto de las ramas de la Geometría fundamentalmente por dos características. Una de ellas, netamente técnica se refiere a su enfoque global, es decir a las propiedades que ligan entre sí a todos los elementos del conjunto estudiado a diferencia de aquellas áreas de la Geometría que realizan un enfoque local. Analiza las propiedades geométricas en sí mismas, prescindiendo del tratamiento métrico. La segunda característica importante de la Convexidad es histórica pues si bien su primer antecedente se remonta a Grecia su desarrollo se lleva a cabo entre el siglo pasado y el nuestro, cobrando interés a partir de las investigaciones de H. Minkowski que aunó el enfoque algebraico y el geométrico del tema. Posteriormente la Teoría de Convexidad ha ido evolucionando y desarrollándose hasta convertirse en la actualidad en gran colaboradora de muchas disciplinas matemáticas que aplican resultados de este área a sus problemas específicos.

2.- Conjuntos convexos:

Como esta rama de la Geometría surgió y se desarrolló a partir de problemas concretos, es posible trabajar de una manera bastante intuitiva en una, dos y tres dimensiones, permitiendo de forma sencilla la ejercitación de la imaginación y la discusión de la solución de algunos problemas elementales sin necesidad de utilizar definiciones de gran complejidad. Aparte brinda también una magnífica oportunidad para trabajar con el método deductivo a través de demostraciones de propiedades previamente inducidas mediante la observación de ejemplos presentados.

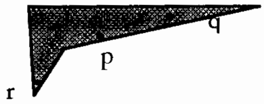
Partiendo de las definiciones de conjuntos convexos y cóncavos que nuestros alumnos conocen desde los primeros años es posible presentar ejemplos en el plano y en el espacio tridimensional, y pedir que reconozcan cuáles son convexos y justifiquen. A partir de esto, puede seguirse trabajando.

3.- Miradores y estrellas:

Una generalización sencilla del concepto de conjunto convexo es la idea de conjunto estrellado. Para trabajar con él, daremos algunas definiciones y mencionaremos algunas propiedades que surgen inmediatamente.

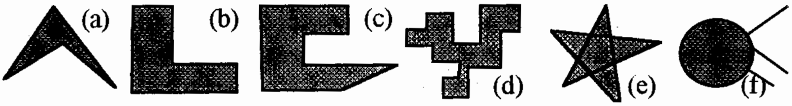
Dado un conjunto C (Por ejemplo: una figura en el plano o un cuerpo en el espacio), decimos que un punto p ***ve a*** un punto q en C, si el segmento pq está totalmente incluido en el conjunto C.

Por ejemplo:



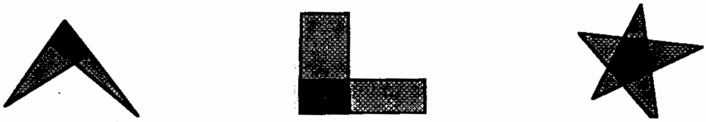
p ve a q
p no ve a r
r no ve a q

En un conjunto convexo, todo punto ve a todo punto del conjunto, pero si un conjunto no es convexo, existe algún par de puntos que no se vean mutuamente y además si el conjunto no es convexo, cabe preguntarse si habrá puntos que vean a todos los otros puntos del conjunto. Pensemos en algunos ejemplos concretos en el plano.



En los casos a, b y e sí, es posible encontrar puntos que cumplen esta condición. En el resto de los casos no. El subconjunto de puntos de la figura dada que cumple con esta propiedad, recibe el nombre de ***mirador*** del conjunto y se simboliza mir(C).

En estos casos, los miradores son:



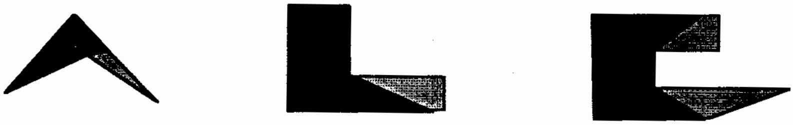
Es fácil ver y demostrar que el mirador de un conjunto es convexo. El mirador de un conjunto tridimensional, puede tener dimensión 3, 2, 1 o bien 0.

Los conjuntos cuyos miradores no son vacíos, se llaman ***estrellados***, o simplemente ***estrellas***.

Dado un conjunto S y un punto $x \in S$, llamamos ***estrella de S respecto de x***, al conjunto de los puntos de S que son vistos desde x. En símbolos:

$$st(x,S) = \{\ y \ / \ y \in S \ \wedge \ x \text{ ve a } y \text{ en } S\ \}$$

En los siguientes conjuntos, hemos marcado la estrella respecto del punto marcado:



La estrella de un punto del mirador de un conjunto es todo el conjunto.

Como puede apreciarse, estos conceptos son muy sencillos e incluso los nombres que se dan "hablan por sí solos". Es interesante trabajar con los alumnos estas ideas no solo en el plano sino en el espacio, donde hace falta un poquito más de imaginación. Pero tanto en dos como en tres dimensiones, las preguntas y las respuestas surgen solas, como en un juego en el cual aparecen ejemplos, contraejemplos y propiedades...

4.- El problema de los guardianes de la galería de arte:

Este problema surgió de un planteo concreto; debido a Victor Klee:

En una galería de arte se tienen cuadros colgados en las paredes y se desea contratar guardianes que vigilen estas obras. Cada guardián se quedará quieto en una posición, pudiendo mirar en todas las direcciones. La cantidad de guardianes se quiere minimizar por razones de economía. ¿Cuántos guardianes se deberán contratar?

Es evidente que la cantidad necesaria de guardianes y su ubicación depende de la forma que tiene la galería.

Si se trata de una galería de forma convexa, se necesita un solo guardián y puede ubicarse en cualquier punto del conjunto pues dos puntos cualesquiera del convexo siempre se ven. Si se trata de un conjunto estrellado, también es suficiente colocar un guardián, esta vez en cualquier punto del mirador del conjunto.

Es posible presentar varios conjuntos: cóncavos, convexos, con agujeros, estrellados, y analizar en cada uno de ellos la cantidad mínima de guardianes y su ubicación. Es notable cómo la presencia de columnas en la galería dificulta la acción de los guardianes y las respuestas...

Una variante de este problema, consiste en considerar que los guardianes pueden desplazarse a lo largo de un segmento fijo. Se los llama guardianes móviles. Es interesante replantearse la actividad anterior, pero pensando en guardianes móviles.

5.- Visibilidad en direcciones restringidas:

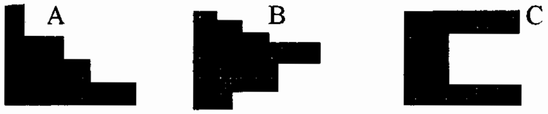
La aparición de las computadoras revolucionó el mundo y la ciencia en particular. Consideremos ahora una situación en la cual quizá nunca nos hemos detenido a pensar.

Un triángulo es indudablemente una figura convexa. Sin embargo, al dibujar un triángulo en la pantalla de una computadora, observamos que, en general, sus lados no son realmente rectos, sino que se trata de "escaleras". Únicamente son rectos cuando son verticales u horizontales.

Esta observación dio origen en la década pasada a una nueva rama de la Teoría de la Convexidad: la Visibilidad en Direcciones Restringidas, en la cual se comenzaron a estudiar figuras que si bien no eran convexas en el sentido clásico, sí lo eran bajo ciertas restricciones.

Un conjunto es ***O-convexo*** si su intersección con cualquier recta en las direcciones de O es un segmento, siendo O un conjunto de direcciones a las que se restringe el estudio.

Por ejemplo, en el caso de la pantalla de la computadora, que solo vamos a consideramos $O = \{0°, 90°\}$, resultando que:

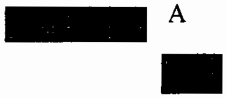


A y B son O-convexos.
C no es O-convexo..

Como se ve en estos ejemplos, existen conjuntos convexos según ciertas direcciones que no son convexos propiamente dichos.

Es fácil darse cuenta de que un conjunto convexo es O-convexo para todas las direcciones de O.

Los conjuntos O-convexos pueden ser no conexos, como lo demuestra el siguiente ejemplo:



A es $\{0°,90°\}$-convexo, pero no es conexo

Estos elementos generalizan la idea de conjuntos convexos y permiten establecer una teoría en la cual se amplia el concepto de convexidad.

6.- Conclusiones:

En este trabajo hemos presentado algunas ideas de la geometría de convexidad. Esta propuesta que fue introducida en cursos de capacitación docente y trabajada en primera instancia con los docentes de nivel medio y superior asistentes, actualmente es parte del material producido para un curso de perfeccionamiento docente a distancia.

Si bien no se menciona estos temas en los curricula escolares, su importancia reside en la simplicidad de sus conceptos, los cuales, como hemos planteado aquí, permiten el desarrollo y la ejercitación de la intuición de nuestros alumnos.

Por tratarse de una teoría de origen reciente, puede también servirnos para mostrar a nuestros alumnos que la matemática no es una ciencia acabada y muerta, sino que vive, que evoluciona, que está en continuo cambio, respondiendo a un mundo que plantea problemas y exige respuestas.

Referencias Bibliográficas:

- **Crespo, C. y Ponteville, Ch.** (1995). *Geometría: Los problemas a lo largo de la historia*. Publicación de la IX Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.(Vol. 1, pp 383-387) - La Habana, Cuba.
- **Crespo, C. y Guasco, M.** (1996). *Geometría: su enseñanza*. Buenos Aires, Argentina: Prociencia.
- **Grunbaum, B.** (1967). *Convex Politopes*. London: Interscience Publishers.
- **Klee, V.** (1951). *On certain intersection properties of convex sets*. Canadian Journal of Mathematics. 3, (pp 272-275).
- **Rawlins, G.** (1987). *Explorations in Restricted Orientation Geometry* . Doctoral Thesis, Faculty of Mathematics, University of Waterloo - Ontario, Canadá.

Lectura comprensivo-activa en la enseñanza de la Matemática

Naraskevicins,M. ; Agostini,E. ; Diaz,C. ; Lasserre,A. ;
Lazarte,A. ; Odstrcil,D. ; Royo,J. ; Torres Bugeau,C.

A raíz de la gran deserción observada en el primer Año de la Universidad y de los Profesorados de nuestra provincia y para explorar las causas de la misma, particularmente en el área Matemática, nuestro equipo, en 1993, realizó una encuesta entre los alumnos de 1° Año de las distintas Facultades de la UNJu[2] y de los profesorados de Matemática y Física del IES [3]José E.TELLO

Del análisis de la misma se infirieron datos importantes que orientaron el diseño de nuestra investigación (Fase exploratoria)

El ingresante al nivel superior entiende:

- que no está suficientemente preparado en relación a los conocimientos básicos de Matemática.
- que lo que se enseña en el secundario es elemental e incompleto (Esto se nota sobretodo en Geometría)
- que su práctica se limitó a la repetición de ejercicios tipo
- que no pudo apropiarse, a lo largo del secundario, de una metodología de trabajo independiente
- que no sabe manejar bibliografía

Por otra parte, el fracaso en Matemática no era un problema nuevo, ni exclusivo de nuestra provincia. Vimos, entonces, que abundaban las dificultades en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática y las causas a las cuales se atribuían las mismas. Acercarnos a ellas implicó, realizar una delimitación que nos permitiera abordadas como problema de investigación. Acudimos, por ello, a una primera localización enmarcándonos en la tríada docente-conocimiento-alumno que se pone en juego en las situaciones didácticas institucionales.

Afirmamos nuestra mirada en el docente como variable independiente, cuya conducta desencadena, consecuencias en las demás. A grandes rasgos, trabajamos, en relación con esto, en varios niveles:

a.- Poniendo a prueba la posibilidad de implementar estrategias de investigación-acción en una labor conjunta de equipo docente constituído por profesores de niveles distintos (medio y universitario). Así ajustamos, en los posible, nuestro propio desempeño como investigadores al desarrollo de un nuevo paradigma en él que, a las personas tradicionalmente involucradas como "objetos" de investigación, se les reconoce, en cambio, su condición de "sujetos", actores sociales que constituyen la realidad social y al mismo tiempo son determinados por ella desde sistemas de significación que los

[2] UNJu : Universidad Nacional de Jujuy

[3] IES : Instituto de Educación Superior

contienen y le dan sentido a sus acciones y que deben, ineludiblemente, modificarse como condición de cualquier cambio.

b.- Apelando a la indagación de esas razones de los mismos sujetos para interpretarlas al confrontarlas con el conocimiento pedagógico acuñado sobre el tema.

c.- Aportando a ese trabajo conjunto de producción de saberes, lo necesario para proyectar, implementar y evaluar nuevos modos de desempeño docente, que nos permitiesen modificar los resultados hasta ahora obtenidos en el aprendizaje de los estudiantes.

Aquí resultó ineludible definir también cuales eran los "conocimientos" que se pondrían en juego en estas situaciones educativas. A raíz de lo obtenido en el relevamiento preliminar del problema, realizado a través de la encuesta antes citada, tomamos en consideración un campo que apareció como uno de los más deficitarios: la Geometría en el 1° Año del Nivel Medio.

Así, nuestro objeto de investigación se circunscribió a la aplicación controlada de innovaciones didácticas, pensadas y trabajadas cooperativamente por docentes de nivel medio y universitario, en la enseñanza de la Geometría en Primer Año.

Atendiendo a otro resultado del mismo diagnóstico y que hemos caracterizado como la búsqueda de mayor "facilismo" por parte del alumno (a partir de datos tales como la relativa desvalorización de los talleres frente a estrategias de enseñanza más directas y expositivas), propusimos una vía alternativa que intentara superar la actual incapacidad para el manejo autónomo de la bibliografía matemática, a través de la generación de situaciones didácticas, fundamentalmente centradas en la lectura individual (aunque guiada) y comprensivo-activa de guías de estudio especialmente elaboradas por el equipo docente para el tratamiento de los diferentes temas. De esta manera, dimos respuesta a una sugerencia del propio Ministerio de Educación de la Nación que propone: *"impulsar la lectura de todas las asignaturas y en todos los grados y años de estudio"* (La Nación-Pág.16-Oct.1994).

Avanzamos así, en la deconstrucción de ese modo de "facilismo" que entrampa a los alumnos desde las redes de un modelo educativo tradicional, sobreprotector y, sobretodo, centrado en el protagonismo que el profesor asume en el escenario del aula y en el que no queda lugar para la respuesta más espontánea y creativa de los estudiantes en la resolución de los problemas matemáticos.

Abunda también el trabajo científico sobre esta problemática, probablemente derivado de la relevancia del tema y de sus consecuencias sociales. Acercarnos a él también significó, para nosotros, la consciente elección de un posiocionamiento teórico. Acudimos así, en el marco más grande de las producciones contemporáneas en Didáctica de la Matemática, a la línea desarrollada por BROUSSEAU y sus seguidores. Además de otros aportes significativos, este autor, asigna en el tema una especial consideración a la conducta profesional del docente[4].

Concepciones como estas han dado lugar a la elaboración de nuevas estrategias didácticas en las cuales, en general, han ocupado un lugar preponderante los materiales de enseñanza que llevan a la construcción de conocimientos desde la resolución inicial, en términos de "respuestas razonables" a " situaciones familiares". A grandes rasgos nos ubicamos en este mismo contexto pero desde dos etapas que consideramos particulares:

1. dentro de los "materiales de enseñanza" trabajamos con "guías de estudio", entendiendo por tales, textos didácticos especialmente elaborados por los docentes para promover en circunstancias específicas, la lectura comprensivo-activa como vía de aprendizaje y de desarrollo de habilidades intelectuales.
2. asignamos una especial importancia al trabajo intelectual del docente, pero orientándolo y aprovechando sus saberes para la elaboración de esos documentos de información y trabajo, de tal manera que el mismo desafío de esa tarea implique una labor más detenida de selección y propuesta de consignas, problemas y recursos de enseñanza y, a su vez, una tarea más sistemática de seguimiento y evaluación de los resultados que se obtengan.

Todo ello implicó, poner a prueba la capacidad de los mismos docentes para modificar sus conductas profesionales, incentivados por el reconocimiento de sus competencias por un lado y la promoción del trabajo en equipos docentes heterogéneos como vía de circulación y aprovechamiento de los saberes que cada profesor posee individualmente.

En resumen, en la intención general de desarrollar una propuesta innovadora en nuestro medio, de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, a nivel más particular, nos propusimos analizar:

- la viabilidad y eficacia del trabajo en equipo docente para la elaboración, seguimiento y evaluación permanente de estrategias didácticas.
- los resultados obtenidos como aprendizajes en los estudiantes expuestos a la nueva situación y
- la pertinencia y eficacia de las guías de estudio como modo de conocer a través de la lectura comprensivo-activa.

Para ello, elegimos la metodología de investigación-acción en el sentido que la defina J .W. BEST.[5]

---

[4] "El rol del maestro : hacer vivir el conocimiento, hacerlo producir por los alumnos como respuesta razonable a una situación familiar y, además, transformar esa "respuesta razonable" en un "hecho cognitivo" extrordinario, identificado, reconocido desde el exterior"

[5] "La investigación activa se enfoca sobre la aplicación inmediata,no en el desarrollo de la teoría ni respecto de una aplicación general. Ha situado su énfasis sobre un problema, aquí y ahora, en una situación localizada. Sus hallazgos han de ser evaluados en términos de aplicabilidad local, no en los de validez universal. Su propòsito es mejorar pràcticas escola-

A modo de conclusiones diremos que la propuesta fué recibida con entusiasmo por parte de los docentes y de los alumnos que participaron en ella. De los primeros, en tanto y en cuanto, les significaba cambiar la tradición en la que se venían desempeñando. Para los segundos, y sobretodo en escuelas con poblaciones de nivel socioeconómico bajo, la recepción gratuita del material de trabajo se constituyó en un elemento motivador del aprendizaje.

Actualmente estamos trabajando en la forma de superar los inconvenientes surgidos en la aplicación de la propuesta, particularmente el derivado del poco hábito lector de los alumnos que motivó una intervención del docente mayor a la planificada.

Asimismo, si la evaluación de los resultados permite comprobar la viabilidad de esta estrategia didáctica como mejoradora de los aprendizajes, estaremos aportando un recurso de tecnología social pertinente que podría ser tomado en consideración en políticas de perfeccionamiento docente y desarrollo del curriculum que se promuevan en el mediano plazo en nuestro medio.

Referencias Bibliográficas:

- **Gentile,E.** (1992). *"Aritmética elemental en la Formación Matemática"*-Prólogo- OMA.

res y, al mismo tiempo, a quienes intentan perfeccionar esas prácticas. El propósito de la investigación activa es combinar la objetividad, destreza en procesos investigativos, hábitos de pensamiento, aptitud para trabajar armoniosamente con otros y espìritu profesional"

PENSAMIENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Algunos acercamientos al razonamiento probabilista de los alumnos

E. Sánchez y D. Benítez
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN.

I. Resumen. El presente trabajo, constituye un informe del proyecto colombo-mexicano, que tiene por objeto, la descripción de algunas características del razonamiento de los alumnos cuando se enfrentan a problemas que involucran el concepto de probabilidad. Se exploran algunas concepciones que rondan tal concepto en ambientes escolares para dar una aproximación a las características predominantes de los alumnos de varios niveles de escolaridad cuando solucionan problemas de probabilidad.

II. Introducción. La probabilidad es un concepto que aparentemente es manejado por todos, por personas con y sin altos niveles de escolaridad. Sin embargo, al explorarse este concepto con preguntas consideradas como elementales se originan en los sujetos que intentan resolverlos una gran cantidad de dificultades de las cuales ellos mismos no son conscientes.

Se diseñó y se aplicó un cuestionario que contiene preguntas "elementales" que involucran el concepto de probabilidad con el objetivo de reconocer los métodos de solución empleados en las respuestas dadas por los estudiantes, por otra parte, con ellas exploramos un conjunto de concepciones principales que rigen el pensamiento de los alumnos en estos casos.

Para el diseño instrumento de observación , se tuvieron en cuenta algunas de las preguntas elaboradas por Escobedo (1992) . No obstante, existen diferencias con el actual proyecto, veamos en que consisten : La primera es sobre el tipo de pregunta, en el trabajo de Escobedo el test está compuesto por preguntas de selección múltiple .Nosotros adicionalmente incluimos un espacio para que el alumno justifique en cada pregunta la respuesta dada. La segunda diferencia es que el presente trabajo se realizó en dos países: Colombia y México con 91 estudiantes de diferentes niveles de escolaridad (Secundaria, preparatoria y Superior). La tercera diferencia, es sobre el tratamiento de los datos: en Escobedo se da un tratamiento fundamentalmente cuantitativo, nosotros lo hacemos en forma cualitativa

En este escrito nos centramos en la descripción de los niveles de razonamiento probabilista encontrados. En un informe posterior, se presentaran las diferencias de los resultados en cada país.

III. Referentes teóricos. En esta sección, presentaremos algunos de los referentes que le sirven de soporte al presente proyecto. La primera idea que exploramos fue la de Obstáculo epistemológico. Bachelard (1976) caracteriza un obstáculo epistemológico como:

" En el acto mismo de conocer, íntimamente donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y confusiones"

Los obstáculos epistemológicos se presentan, no por factores externos al conocimiento, sino por factores intrínsecos que producen entorpecimientos y retrocesos en su construcción.

Un obstáculo puesto como ejemplo por Bachelard, es la experiencia básica que enceguece cualquier acción crítica. De esta manera, las "leyes" construidas de manera empírica por los alumnos, enraizadas en la experiencia que ellos han tenido con los juegos de azar por ejemplo, pueden, según el anterior principio, perjudicar la creación de un pensamiento probabilista con características de rigor.

A algunos investigadores en Psicología, les ha llamado la atención desarrollar estudios acerca de los mecanismos, que las personas utilizan para responder a problemas donde hay que hacer una predicción. Entre ellos, podemos citar a Kahneman y Tversky (1974).Estos autores, en su trabajo , identifican dos clases de heurísticas: La de Representatividad y la de Disponibilidad. En la primera, las personas estiman la probabilidad de un evento, según lo bien que represente algunos aspectos de la población total, o el resultado esperado del experimento. En la segunda, la evaluación de las posibilidades se mide en función de la facilidad con la que lleguen a la mente casos del tipo de acontecimiento que se está evaluando.

Otras investigaciones mas recientes, como las de Sánchez (1996), insisten en la necesidad de realizar investigaciones clínicas, en situaciones que favorezcan con el estudio de las interacciones entre las ideas espontáneas de los alumnos y los conceptos, las formas de representación y los tratamientos que se les proporcionan en los cursos. Señala, además, que numerosas observaciones muestran la persistencia de concepciones incorrectas.

En un estudio sobre el uso de los problemas en la exploración del razonamiento probabilista de los alumnos, Alarcón (1996), hace hincapié en que el uso de problemas de alta dificultad, con los fines señalados arriba, es útil para aislar algunas reacciones de los alumnos. Señala así mismo que si el uso de tales problemas no se acompaña de observación y análisis sistemático sobre su complejidad, se oscurece la reflexión sobre su significado en la enseñanza.

IV. Niveles de pensamiento probabilista. Se encontró una clasificación de las argumentaciones que dan los alumnos cuando se enfrentan a problemas que involucran el concepto de probabilidad. Esta clasificación, es relativamente homogénea en los dos países y será motivo de reflexión en las siguientes líneas . Se citaran algunas frases textuales, que representan un grupo de estudiantes que piensan de manera análoga.

1. Nivel de Impredicción. Este pensamiento recoge al grupo de personas que creen que por estar en situación de azar, es completamente imposible predecir los resultados.

Ante la Pregunta (Problema 1):

Si lanzamos un par de dados y sumamos los puntos resultantes. ¿Qué es más probable?

( ) Obtener una suma igual a 4 puntos

( ) Obtener una suma igual a 5 puntos

( ) Ambos eventos son igualmente probables.

Un estudiante contestó:

"C. ambos eventos son igualmente probables, ya que si lanzamos los dados, no sabremos si nos va a caer 4 o 5, probablemente ninguno de los dos".

2. Nivel determinístico. En este nivel se agrupan a todos aquellos estudiantes que explican el comportamiento de los fenómenos de azar mediante alguna causa poderosa que los rige. Algunas de las explicaciones citadas por los estudiantes de ambos países, se pudieron agrupar de la siguiente manera:

2.1 Físicas. Estas causas, las esgrimen estudiantes que aseguran que algunas propiedades físicas como la fuerza con la que se lance una moneda, el material del cual esté construida la moneda, la cara por la cual se lance, el peso de la pintura de los puntitos de un dado, la posición de las bolas dentro de un saco, el tamaño de las bolas, etc, inciden en el resultado final del experimento.

2.2 Mítico/mágicas. Otra causa, que citan los estudiantes, como rectora de los fenómenos de azar, son fuerzas o poderes sobrenaturales, muchas veces inexplicables para ellos, pero aceptan su existencia y su poderío. Una de tales explicaciones, es la suerte, una rara fuerza que dependiendo si se tiene o no, se obtendrá el resultado requerido. Otra explicación es el poder de Dios, un resultado saldrá o no, dependiendo de la voluntad Divina. Ante la pregunta (Problema 3):

Considere una serie de 4 volados. ¿Cuál de las siguientes combinaciones de águilas y soles espera que ocurra con mayor probabilidad?

(Aclaración: 3 A 1 S significa 3 águilas y 1 sol).

A. ( ) 3 A 1 S   B( ) 2 A 2 S   C( ) 1 A 3 S   D ( ) Igual

Un estudiante Colombiano de 11 de bachillerato (3ero. de preparatoria), contestó:

"D. Ya que podría ser cuestión de suerte, pues hay varias oportunidades de obtener águila o sol en los volados".

Un Estudiante Mexicano de Tercero de secundaria, respondió:

"D. Pues igual, no sabremos lo que Dios quiere".

Otro dato importante es que algunos estudiantes universitarios, también utilizan este tipo de argumentos.

2.3 Empíricas. Aquí la causa utilizada por los estudiantes, es la experiencia. Los estudiantes se fundamentan en la experiencia básica, para lanzar sus juicios, esto es, sus explicaciones descansan en experiencia previas que han tenido con juegos de azar fundamentalmente. Tales experiencias han quedado muy marcadas y ya son fuertes creencias que afectan su pensamiento y lo alejan de la crítica.

3. Nivel Mecánico. En este grupo, están los estudiantes que incorporan constructos de la matemática para explicar los fenómenos de azar, pero la cita se hace fuera de contexto. Este pensamiento es característico de muchos estudiantes que ya han llevado cursos (por lo menos introductorios de probabilidad) y usan los argumentos estudiados en dichos cursos, pero de manera incorrecta. Este pensamiento ha sido llamado mecánico, pues los resultados son citados de manera memorística, dando pocas muestras de haber sido entendido.

El problema 2 dice:

Si tenemos una caja con 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Si tomamos simultáneamente (al azar) dos bolas de la caja, que es mas probable?

Tomar 2 bolas blancas.

Tomar 2 bolas negras

Tomar 1 bola blanca y 1 bola negra

Los tres eventos anteriores so igualmente probables

La respuesta dada por un estudiante universitario de México, en la entrevista clínica que se le practicó, fue:

"D. Pues hay 6 bolas en total, o sea 3 de cada color, entonces podríamos decir que 3/6 son blancas y que 3/6 son negras. Simplifico 1 / 2 = 1 / 2 por eso da lo mismo".

4. Nivel del Pre-Rigor. En este nivel, encontramos estudiantes que se han alejado considerablemente del pensamiento mítico, físico, empírico y de incertidumbre, pues ya utilizan argumentos que desde el punto de vista matemático les falta madurar un poco, pero que hay por lo menos un terreno abonado en ellos para iniciar la discusión de los fenómenos probabilísticos.

Aquí ya se notan algunos rasgos del pensamiento combinatorio, los estudiantes son capaces de avizorar resultados, su mente tiene la capacidad de combinar parcialmente resultados, es decir, el estudiante ve mas de una posibilidad que el fenómeno suceda, pero no encuentra todos los resultados , o ve más de los que son realmente, a causa de falacias que rondan su pensamiento. Este caso sucede por lo general en estudiantes que no han llevado cursos de probabilidad, pero que tienen un capacidad más elevada en su argumentación. Su estructura mental, elabora explicaciones de tipo combinatorio, solo fallan algunos elementos como técnicas de conteo.

En el problema 1, ya citado anteriormente, un estudiante colombiano de 9 de bachillerato, contestó:

"B. Porque los casos de 5 son dos, 3+2 y 4+1; pero los casos de 4 son tres, 2+2,2+2 y 3+1"

5. Nivel de Rigor .En este nivel se encuentran todos aquellos estudiantes que argumentan de manera matemática. Estos estudiantes utilizan diferentes representaciones para explicar el comportamiento del suceso, en unas oportunidades hacen tablas, en otras gráficas o dependiendo de la dificultad del problema, usan ecuaciones. Todas estas argumentaciones son correctas, desde el punto de vista matemático.

Un estudiante , ante el problema 2, contesto de la siguiente manera:

"C. Voy a hacer algunos cálculos para justificarlo:

6C2 = 15

n(A) = 3, n(B)=3 y n(C) = 9 , por este motivo P(C) = 9/15"

En un comienzo, se podría catalogar este pensamiento como memorístico. para explorar este detalle, realizamos una entrevista con este estudiante y aclaró con calidad de detalles cada uno de los pasos que utilizó en sus cálculos.

V. Conclusiones. Se encontró una clasificación de las argumentaciones que dan los alumnos cuando se enfrentan a problemas que involucran el concepto de probabilidad. Esta clasificación fue relativamente homogénea en los dos países . Los niveles de dicha clasificación son:

Impredecibilidad, en este nivel hay un enorme grupo de estudiantes que creen que por estar en situación de azar, es completamente imposible predecir los resultados. Ante tal imposibilidad, deciden contestar que los eventos son igualmente probables. Otro nivel encontrado fue el deterministico, en el que los estudiantes deciden explicar el comportamiento de los fenómenos de azar mediante alguna causa poderosa que los rige. Las explicaciones de este orden acuden a la suerte, a la voluntad Divina, a la experiencia y a los aspectos de tipo físico como la fuerza, la altura, la velocidad, etc . Encontramos un nivel que lo denominamos mecánico, en el se encuentran estudiantes que incorporan de manera errónea conocimientos de la matemática para la resolución de problemas de probabilidad. Este pensamiento fue característico en aquellas personas que ya habían llevado cursos por lo menos introductorios de probabilidad. En el nivel de pensamiento de Pre-Rigor, encontramos estudiantes que se habían alejado considerablemente de las anteriores argumentaciones, en algunos problemas hacen listados incompletos del espacio muestral, en otros hacen listados donde citan mas de los sucesos que verdaderamente pueden ocurrir, no obstante hay un terreno abonado en ellos para iniciar ;la etapa de formalización. En el nivel de Rigor, se encontró una minoría que utilizan diferentes representaciones para explicar el fenómeno , hacen tablas, gráficas , listados, representaciones algebraicas y con relativa facilidad pueden explicar el proceso empleado en la solución.

USO
DE
TECNOLOGÍA

El uso de la calculadora graficadora y la resolución de problemas algebraico-verbales, en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas[1]

Mario Felipe Ramírez Hernández[2]
José Guzmán Hernández
Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN

Resumen: la enseñanza del álgebra en la escuela secundaria se basa generalmente en la memorización de reglas sintácticas y mecanización de procedimientos. Por medio de la resolución de problemas y el uso de la calculadora graficadora, se intenta que la enseñanza y el aprendizaje de sistemas de ecuaciones se transforme en una actividad útil y atractiva. El presente artículo describe brevemente lo que se realizó con 14 alumnos de tercer grado de secundaria, en un estudio pre-experimental que constó de 20 sesiones de trabajo de 50 minutos cada una. Los sujetos resolvieron problemas algebraicos de enunciado verbal inmersos en diferentes contextos utilizando lápiz, papel y calculadora graficadora. El análisis de los resultados obtenidos, muestra que mediante el uso de la calculadora y el trabajo en equipo, se pueden lograr avances importantes en estas tareas.

Introducción:

El estudio de las matemáticas en los diferentes niveles educativos se transforma en *filtros* que muchos estudiantes no logran transponer provocando en ellos fracaso y desaliento. Desde los niveles básicos se encausa a los alumnos a un aprendizaje de las matemáticas por medio de actividades que originan el enfado, porque se abusa de la repetición y mecanización de algoritmos, memorización de tablas de multiplicar y fórmulas de la geometría; con frecuencia, quienes tienen dificultades en estas tareas son señalados como individuos de bajo rendimiento escolar. Las actividades que promueven la participación del estudiante en la construcción y comprensión del conocimiento son escasas. Se deben crear ambientes favorables de aprendizaje, pues no basta con cambios curriculares, se necesita una transformación en la actitud de los profesores, situación difícil por la formación que tienen, ya que, frecuentemente, adoptan modelos de enseñanza en los que se reflejan situaciones de su experiencia como estudiantes.

Actualmente, uno de los propósitos del estudio de las matemáticas en la escuela secundaria, es propiciar en los estudiantes el desarrollo de nociones y conceptos que le sean útiles para comprender su entorno y resolver problemas, así como buscar conexiones entre las matemáticas y otras disciplinas con la finalidad de propiciar aprendizajes significativos.

La investigación:

Para la conformación del marco teórico de este trabajo, se revisaron trabajos de: Arcavi, Baret y Goebel, Burril, Dance *et al.*, Demana y Waits, Dick,

1 Resumen de la Tesis de maestría presentada por Ramírez, M.
2 Programa ProNAP Instituto Hidalguense de Educación.

Flores, Martínez, Rubenstein y Vonder, entre otros. Algunos de estos investigadores mencionan que el uso de nuevas tecnologías transforma a la clase de matemáticas, en un laboratorio donde los estudiantes y profesores investigan y exploran.

El aprendizaje del álgebra en la escuela secundaria ha causado serias dificultades a los estudiantes, por la forma en que se enseña, pues se abusa de reglas sintácticas; en particular, la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, generalmente, se aborda mediante esquemas abstractos elaborados por los profesores de la asignatura o copiados de algún libro de texto.

Con el propósito de indagar qué sucede al utilizar calculadora graficadora (CG), para resolver problemas de enunciado verbal que dan origen a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, se plantea el siguiente problema de investigación.

¿Qué influencia puede tener el uso de la calculadora graficadora, en la enseñanza y el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, obtenidos de problemas algebraico-verbales inmersos en distintos contextos, con alumnos de tercer grado de secundaria?

Metodología:

Esta investigación es de corte cualitativo con un diseño pre-experimental (Cohen y Manion, 1989), pues se aplica un cuestionario inicial (pre-test) antes de la resolución de problemas utilizando calculadora graficadora, y al término de esta tarea la población participante resuelve un cuestionario final (post-test).

Objetivos:

1. Indagar si con el uso de la CG se pueden desarrollar habilidades en los estudiantes, que les permitan explorar nuevas estrategias para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, provenientes de problemas algebraicos de enunciado verbal.
2. Crear un escenario que favorezca la comprensión del estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, por medio del planteamiento y la resolución de problemas en diferentes contextos, así como el trabajo en equipo.

Este trabajo busca dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

1. *¿Cómo se puede aprovechar el uso de la calculadora graficadora en la enseñanza y el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, mediante la resolución de problemas?*
2. *¿Es la calcadora graficadora una herramienta útil en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas?*

Actividades implementadas:

Cuestionario diagnóstico. Fue diseñado para averiguar los antecedentes académicos que tenían los sujetos, es decir, los conocimientos básicos necesarios para trabajar el contenido matemático abordado en esta investigación. Además, los resultados obtenidos se tomaron en cuenta, para elegir a los sujetos que participaron en la fase experimental. Cinco de nivel alto, cuatro de nivel medio y cinco de nivel bajo.

Trabajo previo a la resolución de problemas. Se realizaron actividades, en las cuales los estudiantes tenían que representar algebraicamente enunciados dados en lenguaje común. Para que los sujetos conocieran y utilizaran las teclas de gráficos, durante dos sesiones se graficaron y *rastrearon* los ceros de funciones lineales y cuadráticas.

Cuestionario inicial. Previo a la etapa experimental se aplicó un cuestionario inicial (CI), que contiene seis problemas algebraicos de enunciado verbal, esto con el propósito de indagar cuáles eran los métodos y las estrategias que utilizaban los alumnos sin tener el apoyo de una CG.

Resolución de problemas: fase preliminar. Con la guía del investigador y utilizando cada uno de los alumnos una CG, durante tres sesiones, se resolvieron problemas de enunciado verbal planteados en los contextos de compraventa, acertijo, geometría, física, mezclas e inversión de capital.

Resolución de problemas en equipo. Se integraron cinco equipos, cuatro con tres estudiantes cada uno y otro con dos sujetos. Para esta etapa se utilizaron diez sesiones de 50 minutos cada una, en total se resolvieron 22 problemas, estos se presentaban a los estudiantes mediante hojas de trabajo. El investigador visitaba a los diferentes equipos, con el propósito de observar el trabajo que se estaba realizando, cuando era necesario brindaba apoyo dando *pistas* y ayudando a clarificar ideas, pero evitando dar soluciones.

Cuestionario final. Para observar los cambios posibles debidos al trabajo realizado en equipo, en forma individual, los estudiantes resolvieron un cuestionario final (CF) similar al CI. Debido a que en el CI ningún sujeto logró resolver los problemas planteados en los contextos de la física y de mezclas, se propusieron nuevamente en el CF.

Resultados:

En las respuestas que los estudiantes dieron a los problemas contenidos en el CI, predominaron los métodos algebraicos. En total se esperaban 84 respuestas (seis de cada sujeto), de las cuales 33 fueron correctas, 22 incorrectas, cuatro procedimientos incompletos y 25 no contestadas. Durante la etapa preliminar de resolución de problemas, se observó que los alumnos tenían dificultades en la representación algebraica de los problemas, esto debido a que ellos carecían de habilidades para detectar las relaciones existentes entre lo conocido y lo que se quería indagar, no obstante, en la fase de resolución de problemas en equipo, los estudiantes se apropiaron de estrategias que les permitió superar considerablemente este tipo de dificultades.

A través del diálogo los estudiantes reconocían y analizaban los distintos aspectos que componen un problema y, elaboraban, comunicaban y validaban sus conjeturas. También se redujo el número de errores cometidos al editar las funciones y al determinar el rango para definir *la ventana de visión*. Paulatinamente, los estudiantes mostraron seguridad al utilizar el método de aproximación de soluciones, mediante *el rastreo* del punto de intersección de la representación gráfica del sistema.

Haciendo una confrontación de las respuestas que los sujetos dieron al resolver los cuestionarios inicial y final, se puede decir que hay notables diferencias. Por ejemplo, el 70.2% de las respuestas dadas en el CF son correctas, en tanto que en el CI únicamente el 39.3% son respuestas de este tipo. En el CF hay 13.1% de respuestas aproximadas, mientras que en el CI no aparece ninguna respuesta de este tipo. El 8.3% de las soluciones que se dan en el CF son incorrectas. Este tipo de soluciones fue más frecuente cuando los estudiantes resolvieron los problemas del CI, pues alcanza el 26.2% del total. Con relación al porcentaje de problemas no resueltos, en el CF es solamente el 8.3%, que es menor respecto al 34.5% que se dio en el CI.

Conclusiones:

El planteamiento de problemas con un grado de dificultad creciente y el uso de la CG, llevó a los estudiantes hacia un cambio positivo en el tratamiento de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, pues observaron que mediante la formulación y la resolución de sistemas se pueden resolver cierto tipo de problemas, y que los métodos algebraicos no son la única opción para determinar la solución. El método gráfico que a muchos estudiantes desespera porque lo consideran laborioso, y requiere de mucho cuidado para trazar adecuadamente las gráficas de las funciones obtenidas del sistema, con el apoyo de la CG se convirtió en el favorito. Por ello la incorporación de esta nueva tecnología en tareas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ofrece alternativas que los profesores deben explorar e incorporar a su quehacer docente.

El trabajo en equipo propició la interacción, los sujetos expresaban, compartían, corregían y evaluaban sus conjeturas y estrategias de solución. Además, mediante el apoyo de la CG los estudiantes lograron avances importantes en la resolución de problemas, desde la adecuada representación algebraica hasta la determinación de la solución. Los estudiantes también advierten la importante participación que les corresponde, pues la CG, por sí sola, no elimina todos los obstáculos que se presentan en el estudio de sistemas de ecuaciones. Finalmente, se afirma que la CG es una herramienta útil para explorar y resolver problemas algebraicos de enunciado verbal, que originan sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Referencias Bibliográficas:

- **Arcavi, A.** (1995). *Teaching and Learning Algebra: Past, Present and Future*. Journal of Mathematical Behavior 14, (pp. 145-162).
- **Barrett, G. y Goebel, J.** (1990). *The Impact of Graphing Calculators on the Teaching and Learning of Mathematics*. Teaching and Learning Mathematics in the 1990s, (pp. 205-211).
- **Burril, G.** (1992). *The Graphing Calculator: A tool for Change*. Calculators in Mathematics Education Yearbook, NCTM. USA.

Usando recursion para resolver un problema de crecimiento

Antonio R. Quesada, Department of Mathematical Sciences
The University of Akron, Akron, Ohio 44325-4002
aquesada@uakron.edu

Resumen. Las capacidades de las nuevas calculadoras al integrarse en la enseñanza de las matemáticas estan promoviendo cambios tanto en los temas que se enseñan y la profundidad con que se cubren, como en la metodología con que se presentan. Así encontramos que en los últimos años un número creciente de aplicaciones iterativas y recursivas ha empezado a aparecer en libros de texto desde pre-álgebra hasta cálculo. En esta charla presentaremos un ejemplo para ilustrar como, con la ayuda de las calculadoras modernas, estos métodos permiten resolver una gran variedad de problemas a la vez que facilitan, a nivel de pre-cálculo, el uso de modelos que tradicionalmente se han enseñado en cursos avanzados, y en algunos casos, proveen un método alterno, menos dependiente de fórmulas hechas para resolver problemas.

Los avances tecnológicos de los últimos años, en particular de los nuevos programas de algebra simbólica, de análisis estadístico, y de geometría interactiva asi como las modernas calculadoras gráficas, están facilitando una creciente integración de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Esta integración pone en entredicho la validez de algunas de las premisas que, hasta hace poco, sirvieron de base para designar los distintos conceptos que componen el currículo tradicional de matemáticas, asi como el orden y el alcance con que estos se estudian. Como resultado, un sinnúmero de cambios han empezado a aparecer tanto en los temas que componen el currículo, en la profundidad con que se cubren y en los procesos que se usan, como en la metodología con que se presentan.

Tradicionalmente, los procesos iterativos y recursivos, salvo algunas raras excepciones como el método de Newton, no formaban parte del currículo de los cursos básicos. Había que esperar a cursos avanzados, donde los estudiantes tienen una mayor madurez y a menudo algunas nociones de programación, para encontrar estas ideas. Sin embargo, en los últimos años, respondiendo a los Nuevos Estándares Curriculares (NCTM, 1989) y a los avances de la tecnología, han empezado a aparecer en los libros de texto de secundaria un número de aplicaciones iterativas y recursivas (Brown, 1992; CPMP, 1996; Demana & Waits, 1993; Fergusson, 1994; NCSSM, 1992; UCSMP, 1992).

Además de la capacidad para escribir directamente funciones recursivas, las calculadoras gráficas nos proveen dos capacidades para implementar estos procesos directamente en la *Pantalla Base*. Estas son: i) el poder efectuar un conjunto de instrucciones simultáneamente con solo pulsar una tecla, y ii) el poder usar los resultados de una operación como valor inicial de otra. Estas dos capacidades nos permiten llevar a cabo procesos iterativos y recursivos sin necesidad de recurrir a la programación formal.

En este artículo presentamos un ejemplo que ilustra los beneficios de los procesos iterativos y recursivos en secundaria, a saber: i) versatilidad, ya que estas técnicas pueden usarse para resolver una gran variedad de problemas; ii) accesibilidad de modelos relevantes que, por depender de estos procesos, tradicionalmente se han enseñado a nivel avanzado a un grupo reducido de estudiantes, y que ahora son accesibles a nivel de bachillerato y por tanto a un gran número de estudiantes; y finálmente iii) como solución alterna, ya que el uso de recursión en algunos casos provee un método distinto, menos dependiente de formulas hechas, para resolver problemas.

Nuestro ejemplo, sobre el crecimiento de una población, se ha diseñado a base de preguntas que aumentan en dificultad, de forma que se aprecie la relativa sencillez del planteamiento recursivo así como la variedad de otros enfoques y representaciones no tradicionales que las calculadoras gráficas permiten. En deferencia a aquellos lectores con poca experiencia en el uso de las calculadoras gráficas, se han incluido numerosas pantallas que permitan duplicar fácilmente las soluciones que se presentan. Los ejemplos y figuras que se incluyen a continuación se han obtenido usando una calculadora Texas Instruments TI-83.

Ejemplo. A fines del año 1990 se determinó que la población de monos leones (una especie en peligro de extinción) en una region de Brasil era de 3100, y que la diferencia entre nacimientos y muertes producía un índice de crecimiento anual de la población de aproximadamente un 4%. Asumiendo que estas dos condiciones iniciales (C.I.) permanecen constantes, encuentra:

I) ¿Cuál será el total de la población al final de cada uno de los próximos 8 años? ¿Puedes encontrar una relación entre el total P de la población, el índice r% de crecimiento anual, y un tiempo de t años?

II) ¿Cuál habría sido la población total en 1998 si el índice de crecimiento de la población hubiera cambiado al 6% después de 5 años?

III) Supongamos que la introducción en el área, durante 1991, de nuevos animales de rapiña, que atacan a los monos, obligó a establecer una tercera condición inicial consistente de un promedio de 60 muertes adicionales al año. Considerando las tres C.I. dadas, ¿cuál será la población en 1998? ¿cuando alcanzará la población de monos un total de aproximadamente 5000?

IV) A fines de 1995 cuando el total de la población era de 3447 monos, y dado el éxito con el que el programa estaba funcionando, las autoridades decidieron empezar a importar 100 monos por año. Si el resto de las C.I. se mantuvieron, (i) ¿cuál será la población 6 años más tarde? (ii) ¿Cuándo alcanzará la población un total de exactamente 5000? (iii) ¿Cuál debería de haber sido el número de monos que se empezó a importar en 1995 para que se hubiera alcanzado un total de 5000 en cinco años?

V) Supongamos ahora que cuando la población alcanzó un total de 5.000, mejoras en el control de pesticidas y de los animales de rapiña permitieron que el índice de crecimiento anual, que inicialmente es de un 4%, aumentara en 0.5% cada año, eliminandose a la vez cualquier otra C. I. ¿Cuál será el total de la población 4 años más tarde?

VI) Finalmente, cuando la población llega a los 10.000, las autoridades comienzan a relocalizar los monos a otras regiones a razón de 250 monos por mes. ¿Cuántos meses le tomará a la población volver a ser de 6.000 monos? ¿Qué pasaría si se relocalizaran 170 monos por mes en lugar de 250?

Solución. I) En la figura 1.a vemos la solución en forma recursiva. Si bien este enfoque resulta un poco chocante la primera vez que se usa en el salón de clase, los estudiantes pronto se acostumbran a la idea central de que el valor de la variable *Ans* es siempre el resultado del último cálculo efectuado. La dificultad en llevar la cuenta, sin distraerse, del número de pulsaciones cuando éste es moderadamente grande, sugiere el uso de variables. La introducción de variables no solo facilita el resolver problemas más complicados recursivamente, sino que también permite conocer como sus valores van cambiando en todo momento. La primera línea de la figura 1.b muestra como en primer lugar se inician las variables *A* para la población y un contador *T* para el año en turno. A continuación entramos la segunda línea con las relaciones que gobiernan los cambios de *A* y *T*, seguidas por una lista de aquellas variables cuyos valores nos interese observar a través de los cálculos. Finálmente, procedemos con la iteración pulsando repetidamente la tecla de *Enter*.

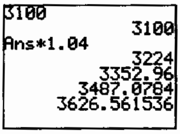


figura 1a

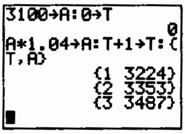


figura 1b

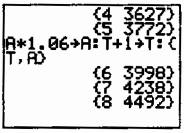


figura 1c

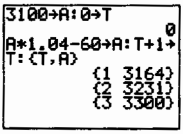


figura 1d

II) La solución a esta pregunta, pone de manifiesto la habilidad de poder parar y modificar un proceso recursivo en cualquier momento. Como vemos en la figura 1.c, después de que *T* se hace igual a 5, se llama la lista de instrucciones (usando 2^{nd} *Enter*) y se edita convenientemente. El proceso de iteración prosigue entonces hasta que $T = 8$.

III) Como ilustra la figura 1.d, basta con substraer 60 de la expresión previamente establecida que calcula el valor de *A*. La figura 2.a muestra que en aproximádamente 20 años la población de monos alcanzará los 5000.

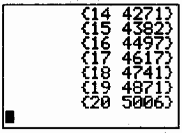


figura 2a

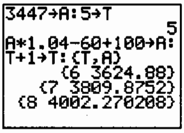


figura 2b

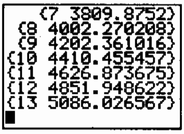


figura 2c

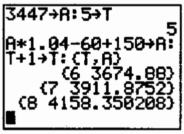


figura 2d

IV. La primera pregunta de esta sección, como se aprecia en la figura 2.b, sirve de práctica para que se redefinan los valores iniciales y para que se modifique el cálculo de *A*. La figura 2.c muestra que la población alcanzará los 5000 cuando *T* llegue a ser 13, es decir, en el año 2003.

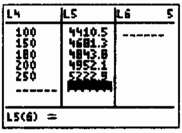


figura 3a

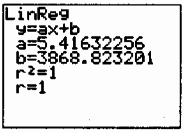


figura 3b

figura 3c

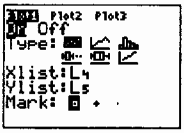


figura 3d

La tercera pregunta se ha resuelto siguiendo un proceso no tradicional. Primero se tantea con distintos valores (150 en la figura 2.d) y se calcula el total correspondiente alcanzado en 5 años, seguidamente se recogen los resultados obtenidos en listas (figura 3.a) y finalmente, como sugiere el diagrama de puntos (figura 4.a), se usa regresión lineal obteniendose una correlación perfecta (figura 3.c).

Una vez conseguido el modelo lineal cuya ecuación se ha escrito en y_2, la solución exacta se obtiene buscando la intersección de su gráfica con la de $y = 5000$ (figura 4.b).

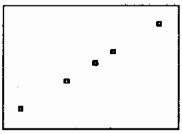


figura 4a

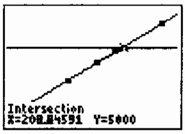


figura 4b

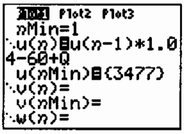


figura 4c

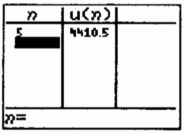


figura 4d

Alternatívamente también puede usarse la representación vía *Mode Seq* (figuras 4.c-d).

V. En la figura 5.a hemos introducido esta nueva condición inicial usando otra variable *R*, a la que se asigna el índice, 4%, de crecimiento inicial en la primera línea. El valor de *R* se modifica en la segunda línea para que refleje el incremento de 0.5% anual.

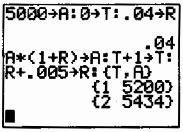


figura 5a

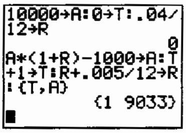


figura 5b

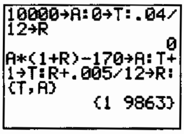


figura 5c

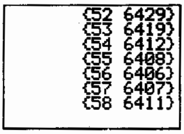


figura 5d

VI. Las figuras 5.b y 5.c muestran la solución asumiendo las condiciones de crecimiento establecidas en (V) y el decremento debido a la relocalización. Una vez que los estudiantes descubren que relocalizando 170 monos por mes la población nunca llega a ser 6000 (figura 5.d), es de interés sugerir que exploren la situación gráficamente.

Referencias Bibliográficas:

- **Brown, R.** (1992). *Advanced Mathematics*. Boston, MA: Houghton Mifflin.
- **Core-Plus Mathematics Project** (1996). Dedham, MA: Janson Publications, Inc.: CPMP.
- **Demana F., & Waits, B.** (1993). *Precalculus*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Pub. Co.
- **Fergusson, R.** (1994). *Precalculus Plus*. St. Paul, MN: West Publishing Company.
- **National Council of Teachers of Mathematics** (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.
- **The North Carolina School of Science and Mathematics** (1992). *Contemporary Precalculus Through Applications*. Deham, Massachusetts: Janson Publications, Inc.: NCSSM.
- **The University of Chicago School Mathematics Project.** (1992). *Precalculus and Discrete Mathematics*. Glenview, Illinois: Scott, Foresman: UCSMP.
- **Quesada, A.** (1997). *The Power of Recursion*. Proc. of the Ninth Ann. Int. Conf. in Colleg. Math., (pp. 401-405). Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Pub. Co.
- **Tucker, A.** (1980). *Applied Combinatorics*, 3a. Ed. New York, NY: J. Wiley & Sons.

Elementos de matemática con calculadora TI-92

Edison De Faria Campos
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

1. Introducción:

Organizaciones matemáticas tales como la Ntional Council of Teachers of Mathematics, la Mathematical Association of America y la Mathematical Sciences Education Boaerd de la National Academy of Scinces, han endosado fuertemente el uso de las calculadoras en la enseñanza de las matemáticas.

Los estándares para la enseñanza de la NCTM [NCTM91,pp. 134-151]argumentan que algunos de los procedimientos computacionales que forman la base de los cursos de matemáticas en todos los niveles, han dejado de ser esenciales. El ejecutar procedimientos computacionales y simbólicos manualmente implica un consumo de tiempo y una frecuente pérdida de vista de los hechos matemáticos involucrados por parte de los estudiantes. Con la introducción de las calculadoras con capacidad numérica, simbólica y gráfica es posible desenfatizar las habilidades algorítmicas, y llenar el vacío resultante con un incrementado énfasis en el desarrollo de conceptos matemáticos. Por otro lado, el ahorro de tiempo permite que los estudiantes tengan acceso a nuevas maneras de explorar conceptos, verificar conjeturas descubrir y hacer conexiones entre distintas representaciones matemáticas.

Los nuevos programas para los cursos de matemáticas a nivel colegialde la AP (Advanced Placement) para los años 1997-1998, incluyen el uso de calculadoras graficadoras con capacidades numéricas y gráficas. Entre sus objetivos encontramos el siguiente: El estudiante utilizará la tecnología para ayudar a resolver problemas, experimentar, interpretar resultados y verificar conclusiones.

El uso de la calculadora en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, ha sido uno de los temas más investigados a nivel mundial. Algunas investigaciones arrojan resultados favorables en el sentido de que la calculadora es una herramienta importante para los estudiantes de todos los niveles, y que la tecnología en particular, provoca y obliga a un cambio en el enfoque de la enseñanza de las matemáticas.[RW96], [CV96], DuDi94], Dion90].

Es cierto que la incorporación de las calculadoras en el salón de clase implica "nuevas" dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En particular demanda un mayor esfuerzo de los profesores para elaborar secuencias didácticas adecuadas para algunos temas, cambiar la forma de evaluar, aprender a utilizar la tecnología, detectar resultados equivocados producidos al utilizar la tecnología y sobre todo lograr obtener el apoyo institucional para conseguir los elementos necesarios para la incorporación y utilización de la tecnología en su quehacer diario.

A continuación presentamos algunos temas de precálculo y cálculo, utilizando la supercalculadora TI92 como herramienta de apoyo para discutir las distintas actividades propuestas.

2. Resolución de sistemas de desigualdades lineales:

Con el comando **simult(matriz,vector)** podemos resolver un sistema de ecuaciones lineales de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$, con A matriz y $\vec{b}$ = vector. Para determinar el conjunto de soluciones del sistema

$$x + 2y = 5$$

$$3x + 4y = -1$$

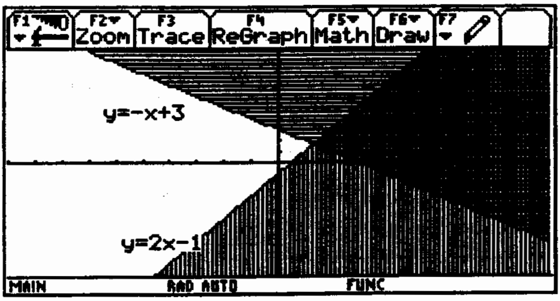
escribimos en la linea de entrada **simult([1,2;3,4],[5;-1])** y obtenemos como respuestaun vector columna con las entradas –11 8, es decir x=-11, y=8.

Ahora supongamos que queremos determinar el conjunto solución de el sistema de desigualdades lineales:

$$y \leq 2x - 1$$

$$y \geq -x + 3$$

En el editor de ecuaciones ◆ [Y=] escribimos en y1 la expresión 2x-1 y seleccionamos el estilo que sombrea la recta por debajo **F6**, **8**, debido al ≤ en la primera desigualdad. Escribimos en y2 la expresión –x+3 y seleccionamos el estilo de sombreado por encima **F6**, **7** por el ≥ en la segunda desigualdad. Al pulsar ◆ **[GRAPH]** podemos visualizar el conjunto común a los dos sombreados, el cual es el conjunto solución del sistema dado. Si queremos ver la gráfica dibujándose simultáneamente presionamos



◆ [F], seleccionamos **SIMUL** en **Graph Order** y finalmente ◆ [GRAPH].

3 Límites:

El comando **limit (expresión, var, punto [,dirección])**, Calcula el límite de la expresión respecto a la variable varen el número punto. La dirección es opcional y se utiliza para límites laterales: -1 para límite por la izquierda y +1 por la derech. Podemos definir funciones por intervalos utilizando la función la función **when(condición ,instrucción, verdadera[,instrucción-falsa][,desconocida])** y posteriormente calcular límites. Considere los siguientes ejemplos:

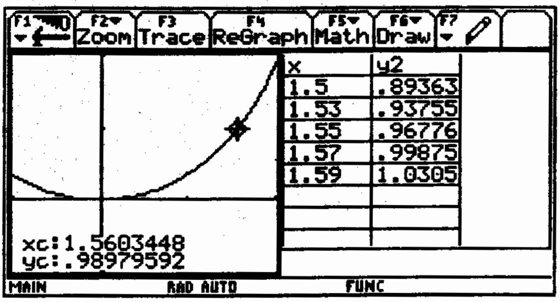
1.- $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\int_0^x \tan^2 t dt}{\tan x}$$

2.- $$\lim_{x\to 0} \frac{x+\left|1-\sqrt{x+1}\right|}{\left|1-\sqrt{x+1}\right|}$$

Para el primer ejercicio, escribimos en la línea de entrada:

limit($\int((tan(t)^\wedge 2, t, 0, x) / tan(x), x, \pi/2, -1)$

y como resultado obtenemos $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\int_0^x \tan^2 t dt}{\tan x} = 1$. Pero, ¿cómo podemos estar seguros de que la respuesta obtenida es correcta? Una forma de verificar el resultado es utilizando otras representaciones, como por ejemplo la gráfica y la numérica (tabla). Podemos definir la función $\frac{\int_0^x \tan^2 t dt}{\tan x}$, almacenarla en y1(x) con $\boxed{\text{STO}}$, y graficarla en el rango [-1,2] para x y [-1,1] para y. Para la tabla, podemos dar valores para x cercanos a $\pi/2 \approx 1.571$. Como resultado obtenemos:

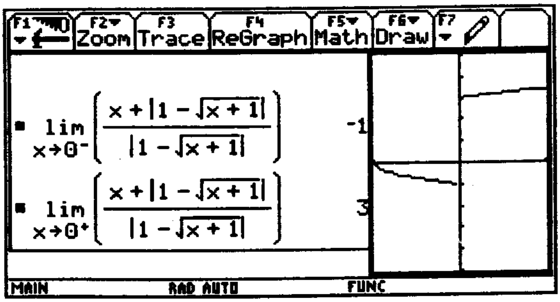


lo que confirma la respuesta que obtuvimos anteriormente.

El ejercicio 2 es muy interesante. Si escribimos en la línea de entrada:

$limit((x + abs(1-\sqrt{(x+1)}))/(1-\sqrt{(x+1)}), x, 0)$

obtendremos como respuesta **undef**. Para averiguar el motivo por el cual el límite es indefinido, podemos graficar la función, hacer una tabla para valoresde x cercanos a cero o bien intentar calcular los límites laterales. En la gráfica que sigue, observamos que los límites laterales existen pero son diferentes, por lo tanto el límite no existe.



Referencias Bibliográficas:

- **De Cancio, M. y De Varona, J.** (1996). *¿TI-92, revolucionará la enseñanza de los cursos de matemáticasdel nivel superior?* Décima reunión Latinoamericana y del Caribe sobre la Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Puerto Rico.
- **Dion, G.** (1990) *The graphics calculator: a tool for critical thinking*. Mathematics Teachers.No. 87.
- **Dunham,P. y Dick,T**.(1994). *Research on graphing calculator*, MathematicsTeacher.No. 87.
- **De Faria, E**. (1996) *Explorando polinomios de Taylor con TI-92*.Memoria de la Décima reunión Latinoamericana y del Caribe sobre la Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Puerto Rico.
- (1991) *Professional Standards for teachingMathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- **Ramírez, B. y Wayland, K**. (1996). *La calculadora TI-92 y su impacto en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas*. Memoria de la Décima reunión Latinoamericana y del Caribe sobre la Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Puerto Rico

Creencias y conceptos de una maestra en el uso de las calculadoras gráficas en la clase de: un estudio de caso

Mario Murillo Chave
Universidad de Costa Rica

Los avances en tecnología y producción en masa han hecho que los precios de las calculadoras hayan caído vertiginosamente. Como consecuencia, las calculadoras se han hecho más accesibles a más personas, en particular a muchos estudiantes. A la vez, Ha habido muchos investigadores que han tenido la perspectiva del uso de las calculadoras en marcos educativos. En los últimos 20 años se han hecho muchas recomendaciones para el uso de esta herramienta. Las recomendaciones hechas por Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos de Norte América (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) han jugado un papel determinante en la formulación de estas recomendaciones.

El uso de las calculadoras gráficas en los procesos de enseñanza aprendizaje es relativamente nuevo. Adicionalmente, mientras hay profesores y maestros que ven con buenos ojos esta tecnología y la promueven, hay otros que se oponen a su uso en escuelas y colegios. No es extraño encontrar a muchos de estos últimos usar la calculadora para efectuar sus voluminosos y costosos cálculos (Williams, 1987, p. 8). Podemos suponer que ellos son renuentes a un cambio en el uso de la tecnología porque esto significa un cambio profundo en la forma en que están acostumbrados a llevar a cabo las tareas de instrucción. Por otra parte están aquellos que tienen una actitud positiva hacia las nuevas tecnologías. Podemos suponer que estos no están sujetos a los métodos "a la antigüita", sino que más bien están deseosos de explorar todas las posibilidades que las nuevas tecnologías ofrecen a los marcos educativos. De manera general, actitudes y creencias de los maestros y profesores son determinantes en el nivel de uso de las calculadoras en las prácticas educacionales.

Recordemos acá que cuando una nueva tecnología llega a estar disponible, la gente tiene la tendencia de usarla para hacer las mismas cosas que acostumbraba a hacer sin ella. Usualmente, nuevas tecnologías ayudan a acelerar y mejorar procesos. Lo mismo ocurrió con las calculadoras: Un primer uso de ellas fue hacer pesados cálculos con alguna precisión. Materiales primitivos diseñados para "ayudar a entender" la calculadora, fueron simples ejercicios. Pero la tecnología va más allá de hacer las mismas cosas en su ausencia. Usos y experiencias abren nuevas formas de empleo, limitadas solamente por la imaginación. Mirar a quienes estás usando la tecnología es recomendable por todo lo que podamos aprender. De ahí que: **El propósito de esta investigación es estudiar las opiniones e ideas de una profesora que usa regularmente la calculadora gráfica en sus clases y cómo esto se relaciona con, e influye las prácticas educacionales que esta profesora prepara y desarrolla**. –Se escogió solamente una profesora como el sujeto de estudio de manera tal que un análisis a profundidad se pueda llevar a cabo. Para su escogencia se usó muestreo por referencia. Ella es una profesora de un colegio (high school) en una ciudad mediana del sur **de los Estados** Unidos. Para la recopilación de datos se usó triangulación (**Krathwohl, 1993**) requiriendo un mínimo de fuentes de datos. En este estudio se usó: **observa**ción directa no intrusiva, entrevistas grabadas, materiales de clase y **conver**saciones informales antes y después de la clase. Se hizo un total de 25 **visitas** en los meses de octubre y noviembre. Hubo una entrevista previa a las **visi**tas. Las observaciones de clase dieron ideas para formular las preguntas que se hicieron en ocho entrevistas cortas a lo largo de las últimas semanas de las visitas. Las entrevistas se transcribieron para su posterior análisis. el análisis de los datos se hizo durante los meses de enero y febrero de 1997.

En este estudio, la profesora demostró una alta consistencia entre sus creencias y sus prácticas. Se destaca el hecho de que la profesora ha integrado completamente la calculadora gráfica al ambiente tecnológico que ella ha creado en su aula. Forman parte de este ambiente dos computadoras con sus impresoras conectadas a Interent, un retroproyector de transparencias, un visualizador del despliegue gráfico de la calculadora para ser usado con el retroproyector (screenview), un monitor de televisión, y un conjunto de videocasetera/monitor. Hay a disposición de los estudiantes un juego de calculadoras gráficas con sus manuales y cables para interconectarlas entre ellas y a la computadora. Dentro de este ambiente tecnológico todos y cada uno de los dispositivos fueron frecuentemente usados durante el período de observación. también la maestra usó una variedad de materiales para ilustrar los diversos tópicos. En general, eran siempre los estudiantes los que los manipulaban.

Una característica sobresaliente del ambiente creado era la libertad de acción y responsabilidad que tenían los estudiantes. Mientras ninguno de ellos realizara ninguna acción que interrumpiera a los demás compañeros, prácticamente podían hacer cualquier cosa, inclusive dedicarse a otra actividad nada relacionada con la de la clase. Pero a la vez, cada estudiante debía ser responsable de sus deberes y presentar tareas a tiempo y exámenes satisfactorios. Conjuntamente con este ambiente de libertad, la maestra creaba un ambiente de humor y entretenimiento. Era usual que al principio de la clase presentara desde un chiste hasta una curiosidad tomada de cualquier fuente, desde un periódico reciente hasta la Internet. También es notable la identificación de la maestra con los estudiantes. Ella compartía con sus estudiantes sus inquietudes, celebraciones y particularidades. Para el día de brujas (Halloween) ella llegó en una especie de disfraz; igualmente compartía con algún estudiante el álbum de fotografías , o comentaba con ellos los dibujos humorísticos que hacían para "ilustrar" en la pizarra las soluciones a los problemas. En conjunto, esta actitud ayudaba a crear una atmósfera de trabajo relajada. Esta identificación le servía, según sus palabras para entender mejor a sus estudiantes.

Dentro de las prácticas educacionales frecuentes, está el uso de las calculadoras en conexión con el retroproyector con la correspondiente interfaces. Cuando esta situación se da, no se trata de ninguna manera de una clase **ma-**

gistral, sino una clase de discusión de resultados al final de una serie de actividades. No es extraño que para una situación así la profesora use los datos generados por algún estudiante en su calculadora y los transfiera a la calculadora de la profesora usando la correspondiente conexión. Los casos de "demostración" de uso de la calculadora son tan solo para indicar y discutir cómo obtener los mismos resultados que se habrían obtenido igualmente con papel y lápiz. En este ambiente tecnológico fue frecuente encontrar a grupos de dos a cuatro estudiantes descargando programas para calculadoras desde la Internet, cosa que parecía complacer a la profesora.

Las calculadoras son usadas en muchas tareas, las principales detectadas en esta clase fueron:

1. Cómputo: fue la actividad más obvia y común en el uso de las calculadoras. Las calculadoras fueron usadas para hacer cálculos más o menos complejos desde simple aritmética hasta evaluación de funciones.
2. Graficación: no es difícil entender una de las características más notorias de las calculadoras gráficas. El tiempo reducido en graficar funciones hacen de estas calculadoras una herramienta apropiada en cualquier clase donde se estudian las funciones.
3. Estadística: La nueva generación de calculadoras gráficas tiene poderosas herramientas para estadística, donde cantidad respetable de datos se deben manejar. Adicionalmente, los datos estadísticos se pueden graficar como histogramas, gráficos de dispersión, gráficos de tipo "hoja y tallo" y otros.
4. Exploración: Las calculadoras son herramientas apropiadas para explorar posibles respuestas a preguntas como ¿qué pasa si ... ? Por ejemplo, los estudiantes pueden estudiar las variaciones en *a,b,c* de funciones tales como: $a\,\mathrm{sen}(bx-c)+d$ .Sólo, por poner un caso.
5. Programación. Gracias a las capacidades de programación las calculadoras son usadas para efectuar cálculos complejos y avanzados. Programación significó que la calculadora ejecutara una secuencia de computaciones con alguna interacción con el usuario de acuerdo con el diseño del programador, quien usualmente fue el mismo usuario.
6. Enlace con otras tecnologías. La calculadora no fue la única tecnología usada en el aula de la profesora, sino también otras enlazadas con aquélla, como la computadora y el retroproyector. Por ejemplo, el enlace con la computadora se usó tanto para descargar programas tomados de la Internet como para imprimir los gráficos obtenidos en la calculadora usando la impresora de la computadora.
7. Simulación. Otra de las posibilidades de uso de las calculadoras fue en esta área, donde la calculadora se usó para simular, por ejemplo, el lanzamiento de dados, el juego de lotería, etc.
8. Visualización. Gracias a las capacidades gráficas, las calculadoras fueron usadas para general "“objetos matemáticos"” que ayudarán a los estu-

diantes a construir imágenes mentales. Por ejemplo, explorando las variaciones de los valores a, b y c en la ecuación =ax2+bx+el(la) estudiante construye una imagen mental de cómo estos valores afectan la forma del gráfico.

9. Adquisición de conceptos. Sumando las precedentes funciones, las calculadoras fueron usadas en actividades conducentes a la adquisición de conceptos. Por ejemplo en una actividad relacionada con la generación de números
10. aleatorios usando la calculadora, la profesora insistió en la "aleatoriedad" de los números: no hay una "ley" que determine la aparición del próximo número sobre la base de los precedentes. Una lista tal no presenta ninguna regularidad.
11. Resolución de problemas. Usadas en tareas de cómputo y graficación, las calculadoras permiten a los estudiantes concentrarse en estrategias. Adicionalmente, las calculadoras permiten problemas más reales puesto que con ellas se puede manipular cualquier número.

La profesora siempre consideró a las calculadoras como una herramienta más como el lápiz o el compás, que aunque ayudaba en muchas situaciones, se podría prescindir de ella. La calculadora no debería ser el centro de atención de la clase, aunque su uso permite el cambio de atención de procedimientos a conceptos. Igualmente, la calculadora no debe ser el centro de atención de ninguna discusión, sino un recurso para mejorarla. En este sentido no hay algo así como "hojas de trabajo para el uso de la calculadora", sino más bien actividades que se pueden desarrollar porque la calculadora las permite.

Adicionalmente, las calculadoras permiten más actividades centradas en el estudiante en vez de actividades centradas en el profesor. Por sus características, no significa que las calculadoras se deban usar en todas las actividades: a las calculadoras hay que buscarles su lugar. Las calculadoras son un recurso que se debe usar cuando sea apropiado, y no porque están ahí. Como nueva tecnología que son, la profesora afirma que constantemente ella está buscando el papel de la calculadora. Las calculadoras no se deben usar en toda actividad, sino que el estudiante debe aprender a valorar la calculadora para saber cuándo usarla. En particular, el(la) estudiante debe saber qué es lo que va a hacer con la calculadora, es decir, el(la) estudiante debe saber primero como proceder con los cálculos que él(ella) requiere. en (casi) toda situación, el(la) estudiante debe decidir por sí mismo(a) acerca del uso de la calculadora. el uso de la calculadora es algo que se puede aprender "sobre la marcha". No hay actividades para la calculadora ni actividades "sin calculadora", ni tampoco hay "hojas de trabajo para la calculadora".

La profesora explícitamente manifestó su creencia en el constructivismo. Este parece ser su marco teórico. como consecuencia, ella se percibe a sí misma como una facilitadora. Esto significa que la profesora evita las clases expositivas. También ella considera que un ambiente cooperativo es esencial para el aprendizaje. Por ejemplo, ella considera que los estudiantes aprenden más cuando ellos enseñan unos a otros.

Como complemento, la profesora le da a sus clases un ambiente de libertad. Esta permite al estudiante explorar (por ejemplo con la calculadora) más confortablemente por sí mismo. adicionalmente, la profesora da a sus estudiantes actividades que los ayudan a construir imágenes mentales, algo con lo que la calculadora ayuda. Para evitar el mal uso de las calculadoras, las preguntas se deben formular y con esto acomodar su uso. Aunque muchas actividades nuevas y problemas se trajeron a la clase porque hay una herramienta que permite a los estudiantes enfrentarlos, la principal preocupación de la profesora es el aprendizaje, la conceptualización y el desarrollo de la habilidad para resolver problemas.

Referencias Bibliográficas:

- **Confrey, J.** (1990). What constructivism implies for teaching. En: National council of Teachers of Mathematics (ed), *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics. Monograph No. 4.* (pp. 107-123). Reston, Va. El Editor.
- **Wheatley, G.** (1990). Calculators and constructivism. En: *Arithmetic Teacher*. Oct.: 22-23.

Investigando propiedades de los triángulos con la calculadora TI-92.

Edison De Faria Campos
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

1 Introducción:

Los profesores de matemáticas tenemos un nuevo desafío: Aprender a enseñar de manera diferente a los procedimientos que tradicionalmente hemos utilizado.

Los avances científicos y tecnológico de nuestro tiempo y en especial la electrónica y la informática, han revolucionado al mundo y plantean grandes cambios en todos los niveles, en particular en la educación. La tecnología vino para quedarse, y las futuras generaciones convivirán con ella. La tecnología tiene la potencialidad de modernizar nuestras aulas y hacer las matemáticas más pertinentes e interesantes para nuestros estudiantes. Las computadoras y las calculadoras en particular pueden considerarse como herramientas para ahorrar tiempo que nos ayudan a automatizar y realizar tareas repetitivas y tediosas. Esto significa que las computadoras y las calculadoras permiten que los estudiantes concentren sus esfuerzos en razonar y en la resolución de problemas. Poseer un cierto nivel de alfabetización en estas tecnologías es esencial en el trabajo en el mundo de hoy. La tecnología continúa evolucionando y al mismo tiempo transformando la manera como vivimos, la manera como proponemos y resolvemos problemas teóricos y prácticos, y la manera como hacemos y percibimos las matemáticas.

Las computadoras y calculadoras graficadoras se conceptualizan como un medio de apoyo al curriculum y como herramientas para el aprendizaje. Medios que favorecen *"la creación de ambientes de aprendizajes activos, aptos para resolver problemas, afrontar retos, desarrollar destrezas de pensamiento, creatividad y procesos de reflexión"* (Badilla: 1994, 182). *Específicamente medios que promueven la iniciativa, la exploración, la investigación, el descubrimiento, al construcción de modelos, el diseño, la creatividad, la invención, la interpretación, la experimentación, formulación de hipótesis, la demostración, el análisis, la síntesis, la respopnsabilidad del aprendiz en su aprendizaje, el trabajo colaborativo, en fin la actividad del estudiante sobre el objeto-conocimiento desde diferentes aristas* (Cervantes & Víquez, 1997, 144).

Las computadoras y calculadoras ofrecen muchas oportunidades para la exploración e investigación de propiedades numéricas y relaciones. Aparte del ahorro de tiempo y trabajo tedioso, estas herramientas ofrecen múltiples oportunidades para explorar patrones visualmente y numéricamente, así como establecer conexiones entre representaciones visuales y algebraicas de los mismos conceptos.

La National Council of Teachers of Matematics (NCTM, 1996-97, 18-24) recomienda la integración de la calculadora en distintos niveles de la enseñanza de las matemáticas, para:

- Explorar y experimentar con ideas matemáticas tales como: patrones, propiedades numéricas y algebraicas, y funciones.
- Desarrollar y reforzar habilidades tales como: estimación, cálculo, graficación y análisis de datos.
- Enfocar el proceso de resolución de problemas en lugar de concentrarse en los cálculos asociados con los problemas.
- Tener acceso a ideas matemáticas y experiencia que van más allá de los niveles limitados por los cálculos tradicionales como papel y lápiz, permitiendo elevar el nivel de abstracción y generalización.
- Desarrollar conceptos.
- Construir modelos.

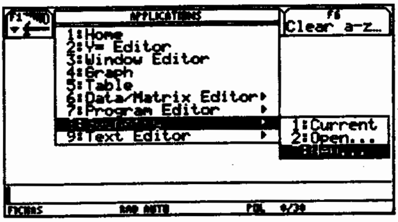
Es claro que las computadoras y las calculadoras no pueden enseñar por si solas. Cualquier actividad de aula, incluyendo aquellas que usan alguna herramienta tecnológica, depende de la actitud del profesor y de la respuesta de los estudiantes a dicha actividad. Incorporar tecnología en las aulas requiere más que simplemente proporcionarlos instrumentos tecnológicos a los estudiantes. El aprendizaje tiene lugar en un ambiente exploratorio e inquisitivo, y por lo tanto tenemos que seleccionar los tipos apropiados de tareas y organizar el ambiente del aprendizaje de tal forma que ellos sirvan de base tanto al uso de la tecnología cuanto a un aprendizaje real.

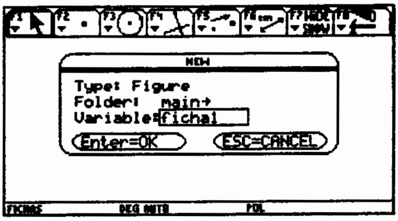
En la siguiente sección desarrollaremos una actividad relacionada con la geometría. El tema escogido se debe a su importancia en la educación media y a la posibilidad de experimentar y conjeturar sobre los objetos geométricos. Según Castelnuovo (Castelnuovo: 1973, 83-87), *si se parte del supuesto que el ente geométrico se forma en la mente humana por abstracción, a partir de las observaciones de objetos reales y de experiencias sobre ellos , se deben hacer preceder a la geometría deductiva, una geometría de carácter experimental, donde ,os axiomas encuentren sus raíces naturales. Se trata de recurrir a la acción, observar un fenómeno que considera al objeto, operar sobre él y conjeturar sobre lo que el objeto significa.*

Utilizaremos la aplicación geométrica incorporada en la calculadora graficadora TI-92 para realizar algunos "experimentos" geométricos. El diseño de geometría se basa en una perspectiva constuctivista en que el sujeto cognoscente construye su propio conocimiento a partir de actividades intelectuales.

2. Actividad propuesta:

La aplicación geometría TI-92 se encuentra en el menú de aplicaciones, el cual se accesa presionando la tecla APPS . Posteriormente seleccionamos la opción 3 :New, para empezar una nueva sesión. En la cajita de New después de Variable: escriba el nombre de la sesión (por ejemplo: ficha 1) y presione la tecla ENTER . La ventana de la aplicación de Geometría aparecerá en la pantalla.





La pantalla de dibujo mide 240 pixeles horizontalmente por 105 pixeles verticalmente. Esto es alrededor de 8.1 cm. Por 3.6 cm., y la barra de herramientas contiene ocho menús seleccionables con las teclas F1 hasta F8.

Ficha 1: Algunas propiedades de círculos.
Objetivo: que el estudiante utilice la TI-92 para descubrir algunas propiedades relacionadas con cuerdas o rectas secantes a un círculo.

Pasos:

1. Construya un círculo arbitrario.
2. Determine un punto arbitrario en el plano etiquételo con la letra X.
3. Construya dos cuerdas arbitrarias al círculo que pasen por el punto X (si X es un punto interior al círculo), o bien dos rectas que pasan por X y que son secantes al círculo (si X es exterior al círculo).
4. Sean P, Q los puntos de intersección de una de las cuerdas (o recta secante) con la circunferencia.
5. Calcule las longitudes de los segmentos XP, XQ, XR y XS.
6. Arrastre el punto X y registre 5 observaciones con las medidas anteriores.
7. Calcule XP: XQ y XR. XS.
8. ¿Qué se puede concluir?

Desarrollo:

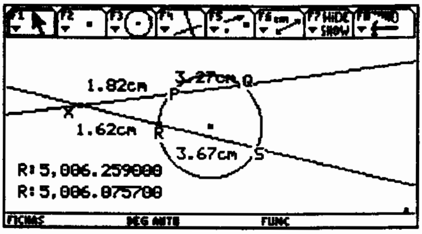
1. Presione la tecla APPS 8 : Geometry, 3 :New, seleccione el Folder: fichas, y escriba cuerdas en la cajita de Variable:
2. Construya un círculo. F3 1 :Circle.
3. Construya un punto etiquetado con la eltra X. F2 1 :Point, F7 4, seleccione el punto y escriba X.
4. Con F2 4 :Line, seleccione el punto X y mueva el cursor para colocar la recta en una posición deseada, y presione ENTER.
5. Repita el paso anterior para construir la otra cuerda (o recta secante).
6. Con F2 3 :Intersection Point, seleccione la circunferencia y cada una de las cuerdas (o rectas secantes) Para obtenr los puntos de intesección de ellas con la circunferencia. Etiquétalos con las letras P,Q, R y S, de tal

forma que P y Q se encuentren sobre una de ellas, R y S se encuentren sobre la otra.

7. Calcule las longitudes de los segmentos XP, XQ, XR y XS. Utilice F6 1 :Distance & Lengh, seleccione X y P, presione ENTER. En la pantalla aparecerá el valor de la longitud de XP. Repita el procedimiento para calcular las longitudes de XQ, XR y XS.
8. Arrastre el punto X y observe como las medidas de los segmentos cambian. Anote las observaciones.

Observación	1	2	3	4	5
Medida de XP					
Medida de XQ					
Medida de XR					
Medida de XS					

9. Calcule los productos XP. XQ. y XR. XS. Para ello puede utilizar la línea de entrada de la pantalla Home o bien F6 6 :Calculate, seleccione cada número, presione la tecla de multiplicación * entre los dos números, y apriete la tecla ENTER. En la pantalla de trabajo aparecerá el resultado de la multiplicación precedido por R:.



10. ¿Qué se puede conjeturar respecto a los productos XP. XQ y XR. XS.?
11. Investigue el resultado anterior en libros de geometría, y analice su demostración.

Referencias Bibliográficas:

- **Badilla, E**. (1994). *Hacia una Política de Informática Educativa en el sistema educativo de Costa Rica*. Seminario Taller nacional de Reflexión sobre Política eb Informática Educativa. EDUNED, San José, Costa Rica.
- **Cervantes, O. y Viquez M**. (1997). Las nuevas tecnologías: viejos y nuevos desafíos para la educación matemática costarricense. *Memoria V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemáticas*. Liberia. Costa Rica.
- **De Faria, E**. (1997). Aplicaciones de la calculadora TI-92 al cálculo. *Memoria V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemáticas*. Liberia. Costa Rica.
- **De Faria, E**. (1997). Explorando polinomios de Taylor con la TI-92. *Memoria X Encuentro Centroamericano y Caribe Form. Prof. E Inv. En Mat. Educativa,* Puerto Rico.
- **Garrón, E**. (1996). Desafíos de la Educación Costarricense en la Formación del Ser Humano para la Sociedad del Nuevo Siglo. *Memoria II Congreso Nacional de Educación*, San José, Costa Rica.

Sistema solucionador evaluador de problemas de Geometría. Sepge.

Yolanda de J. O'Farrill Dinza, Orestes Cruz Hernández ,. Dalia Margarita de la Vega
Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría", Ispjae. La Habana, Cuba

Resumen: En el presente trabajo se destacan las principales características del sistema **SEPGE 1.0**, Solucionador - Evaluador de Problemas de Geometría plana y del Espacio que constituye una herramienta de valor práctico en la enseñanza de una de las disciplinas de las Matemáticas de mayor aplicación. El sistema posee las herramientas necesarias para la solución y evaluación de un problema de Geometría Plana y del Espacio. Consta de dos módulos fundamentales: uno donde el estudiante identifica el modelo Geométrico y resuelve el ejercicio, y otro de acceso exclusivo del profesor donde este puede apreciar con detalles las deficiencias del estudiante además de una evaluación propuesta por el Evaluador.

Introducción: Las potencialidades que poseen los ordenadores ofrecen una fuente de nuevas posibilidades donde la imaginación del hombre puede desarrollarse plenamente. Actualmente, con su extensión a casi todas las esferas estos se van haciendo cada vez más necesarios para el ser humano en la comunicación con sus instrumentos de trabajo y como apoyo en la importante tarea de adquirir conocimientos.

La irrupción de las computadoras personales en la educación da la posibilidad de contar con nuevas herramientas en el perfeccionamiento de las labores de enseñanza y aprendizaje.

El presente trabajo expone la concepción de un Sistema Solucionador Evaluador de Problemas de Geometría Plana y del Espacio con el objetivo de elevar la calidad del proceso de aprendizaje de los estudiantes en Geometría.

Descripción de la interfaz y funcionamiento del sistema.

SEPGE es un Sistema Multimedia destinado al apoyo de la docencia en algunos temas de Geometría, en particular a la solución de problemas.

Para su diseño se consideraron los criterios que se relacionan a continuación:

- Diseño de una interfaz gráfica amigable que emplee las facilidades de las nuevas tecnologías de la ingeniería de software.
- Utilización de las técnicas y tecnologías orientadas a objeto en el diseño y programación de la aplicación.

SEPGE da inicio con la Ventana Principal donde aparece un menú de botones con las opciones **SELECCIONAR PROBLEMA, ABRIR, EVALUACIÓN, AYUDA OPERACIONAL y SALIR.**

El significado de cada una de las acciones se explica seguidamente:

- **SELECCIONAR PROBLEMA:** Se activa una ventana que muestra una lista de problemas, de los cuales el estudiante seleccionará uno para su posterior solución.
- **ABRIR:** Permite continuar la solución de un ejercicio.

- **EVALUACIÓN:** Se activa una ventana con el reporte de evaluación del estudiante en la solución del ejercicio. A este módulo puede acceder sólo el profesor mediante una clave.
- **AYUDA OPERACIONAL:** Muestra la ayuda operacional del sistema.
- **FINALIZAR:** Abandona el Solucionador.

Figura 1. Ventana principal del Sistema.

El sistema consta de dos módulos fundamentales: uno donde el estudiante identifica el modelo geométrico y resuelve el ejercicio, y otro de acceso exclusivo del profesor donde este puede apreciar con detalles la valoración de la solución del ejercicio.

Para el alumno resolver un problema con la ayuda de **SEPGE** es necesario primero, identificar el modelo geométrico que representa la situación problémica planteada, con este objetivo se implementó una ventana donde aparecen diferentes modelos geométricos, una vez seleccionado el modelo correcto el alumno pasa a resolver el ejercicio en la ventana Solución; en la cual el menú de botones es el siguiente:

VER ENUNCIADO, VARIABLES, FÓRMULAS, EVALUAR, AYUDA, cuyos significados se explican a continuación:

VER ENUNCIADO: Muestra el enunciado del problema.

VARIABLES: Muestra una lista de variables dentro de las cuales están las necesarias para la solución del problema.

FÓRMULAS: Muestra un listado de fórmulas donde el alumno debe escoger las necesarias.

EVALUAR: Le brinda al estudiante una valoración sobre la solución del ejercicio.

AYUDA: Accede a la ayuda conceptual.

En esta ventana el alumno puede:

1. Plantear los datos e incógnitas.
2. Plantear las fórmulas necesarias.
3. Escribir la solución.

Otra herramienta que posee el sistema es una calculadora para realizar los cálculos necesarios.

El estudiante tiene la posibilidad de salvar durante la solución del ejercicio, lo realizado hasta un momento determinado de la misma, con el objetivo de poder continuar en otra oportunudad si así lo deseara.

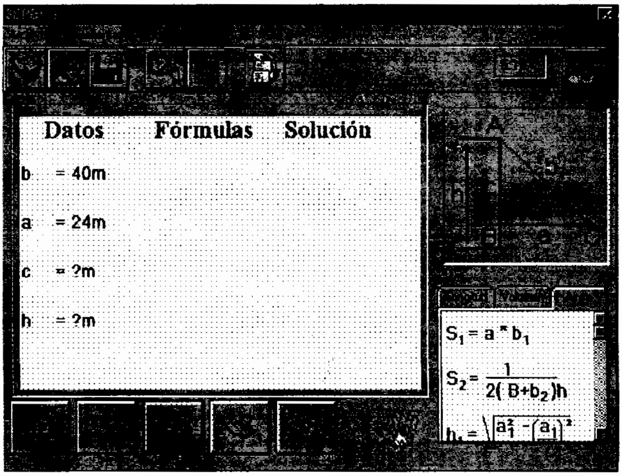


Figura 2. Ventana Solución

Breve descripción del Módulo Evaluador:

El módulo evaluador muestra una descripción detallada de los pasos seguidos por el estudiante y la nota correspondiente a cada etapa, así como la nota final. Implementado hasta el momento están las opciones de satisfactorio y no satisfactorio de acuerdo a un porciento de errores cometidos por el alumno. El profesor puede además según su valoración, darle una nota al estudiantesegún su criterio., lo cual demuestra la flexibilidad del Sistema. Por supuesto para que todo esto sea posible es necesario que una vez concluida la solución del ejercicio el alumno salve la misma.

Requerimientos de hardware.

SEPGE necesita como configuración mínima de hardware una computadora del tipo IBM o compatible capaz de soportar Windows 3.1 o superior. Teniendo en cuenta que es un Sistema Multimedia, el uso de estos no será efectivo sin la presencia de un kit multimedia instalado y configurado apropiadamente, aunque la ausencia de este no implica que esté inhabilitado para ejecutarse.

Conclusiones:

El Solucionador Evaluador de Problemas de Geometría SEPGE:

- Es capaz de evaluar y guiar los pasos a desarrollar por un estudiante en la solución de un problema de Geometría.
- Es flexible pues permite la introducción de nuevos ejercicios sin la reprogramación del código.
- Constituye un paso de avance en la vinculación de la informática al proceso docente.

Referencias Bibliográficas:

- **Borland,** (1995). *Borland DELPHI v. 1.0.* Programmer's Reference. U.S.A.
- **Brugués, A.** (1995). *Desarrollo a toda Máquina.* Byte. Madrid, España
- **Petzold, Ch.** (1992). *Programming Windows 3.1* Microsoft Press, Seattle
- **Hernández, L.** (1996). *La computadora como medio de enseñanza. Su impacto en la sociedad.* ISPJAE.

El análisis numérico en la enseñanza de las matemáticas

Humberto Madrid de la Vega
Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas
Universidad Autónoma de Coahuila. México

La computadora es una poderosa herramienta auxiliar en la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, en ocasiones se usa de forma incorrecta debido al desconocimiento de la aritmética computacional y de técnicas del Análisis Numérico. **Ejemplo 1.** La aproximación a la derivada en un punto por medio del cociente diferencial

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

En [Jimenez] se presenta el ejemplo, entre otros, de aproximar la derivada de $f(x) = e^x$ en $x = 0$, obteniendo

h	$\dfrac{e^h - 1}{h}$
1	1.7182818
0.5	1.2974425
0.1	1.0517082
0.01	1.0050167
0.001	1.0005
0.0001	1.00005
0.00001	1

Sin embargo si tomamos valores de *h* todavía más pequeños, obtendremos el valor 0 para el cociente(invitamos al lector a realizar los cálculos con una calculadora o computadora). Lo mismo ocurre otros ejemplos que presenta el autor.

Ejemplo 2. Aproximación a π mediante el método de Arquímides. Se considera un círculo con diámetro 1 y polígonos inscritos con 2^n lados. El perímetro de estos polígonos se puede calcular mediante la relación de recurrencia

$$p_{n+1} = 2^n \sqrt{2(1-\sqrt{1-(p_n/2^n)^2})}$$

Para una deducción de esta fórmula véase [Rivaud].

Si hacemos los cálculos en una computadora, al hacer crecer n, se va obteniendo una aproximación a π, pero llega un momento en el cual el resultado se aleja del valor correcto y a final de cuentas el valor es cero.

n	p_{n+1}
10	3.14159142150464
15	3.14159264532122
20	3.14159655370482
25	3.16227766016838
27	2.82842712474618
28	0.0

Explicaremos este comportamiento. Lo primero que debemos tomar en cuenta es que las computadoras y calculadoras trabajan con una cantidad finita de números, así que un número real como, digamos, $\sqrt{2}$, tendrá que ser aproximado internamente como un número con una cantidad determinada de cifras.

En el ejemplo 1, al calcular $x+h$, llega un momento en el que h es lo suficientemente pequeña de forma tal que internamente $x+h$ es almacenada como x y así internamente $f(x+h)-f(x)=0$, entonces eventualmente el cociente diferencial valdrá 0 en la computadora.

Existe otro problema. Cuando se restan dos números x,y muy parecidos entre sí, entonces al calcular $x-y$ aumenta el error de redondeo, causando lo que se conoce como cancelación catastrófica. Por eso antes de ser 0, usualmente $f(x+h)-f(x)$ se comportará en forma errática. Un programa computacional que aproxime a la derivada mediante el cociente diferencial deberá tomar en cuenta lo anterior. Una forma de hacerlo es tomando $h>\sqrt{\varepsilon}$, donde ε es la unidad de redondeo. El valor de ε es aproximadamente 10^{-5} para calculadoras y para computadoras, 10^{-4} para precisión simple y 10^{-8} para doble precisión.

En cuanto al ejemplo 2, también se presentan los dos problemas ya citados. La cantidad $p_n/2^n$ tiende a 0 cuando n crece, por lo cual $1-(p_n/2^n)^2$ tiende a 1 . En la expresión $1-\sqrt{1-(p_n/2^n)^2}$ se presenta la cancelación catastrófica y eventualmente será computada como 0. En este caso el problema puede ser resuelto transformando algebraicamente la expresión de para p_{n+1}. Definimos

$$r_{n+1}=2\left(1-\sqrt{1-(p_n/2^n)^2}\right),$$

así que $p_{n+1}=2^n\sqrt{r_{n+1}}$. No es difícil demostrar que r_{n+1} puede reescribirse como

$r_{n+1}=\dfrac{r_n}{2+\sqrt{4-r_n}}$. Estas nuevas fórmulas no exhiben ningún problema computacional y pueden ser usadas para aproximar el valor de π. Para más detalles véase [Rivera-López].

De los ejemplos anteriores se desprende que aquello que **converge en los** números reales no necesariamente converge en la aritmética **computacional,** aunque podemos resolver los problemas de una u otra forma **conociendo** dicha aritmética. También es claro que dos expresiones **algebraicas** equivalentes pueden ser evaluadas en forma distinta por la computadora.

Visualización de series de Fourier:

En otro orden de ideas, veremos cómo el conocimiento del Análisis Numérico nos puede ayudar a desarrollar de una manera eficiente una herramienta educativa. Consideremos el problema de quiere visualizar la serie de Fourier de una función $f(x)$,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx);$$

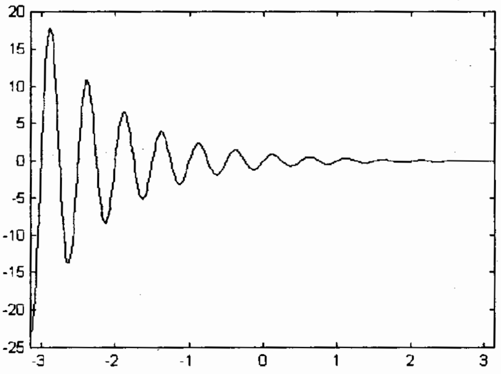
con $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$ y $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx$.

Deseamos graficar la aproximación que resulta de tomar k términos de cada sumatoria, para lo cual necesitamos calcular $a_n, n = 0,\ldots,k$ y $b_n, n = 1,\ldots,k$.

Para algunas funciones estos coeficientes pueden calcularse analiticamente, pero no en general, además queremos que el usuario del programa pueda proporcionar la función que desee, por lo que tenemos que calcular los coeficientes numericamente.

Deseamos además que los cálculos sean rápidos, aunque no necesitamos demasiada precisión ya que los que nos interesa es graficar las aproximaciones.

Aquí uno de los problemas que se presentan es que los integrandos son funciones oscilatorias y muy oscilatorias para k grande. Por ejemplo esta es la gráfica de $f(x) = e^{-x}\operatorname{sen}(4\pi x)$ en el intervalo $[-\pi.,\pi.]$.



Una forma de proceder es dividir el intervalo en partes, donde en cada una de ellas no haya oscilaciones. Por ejemplo entre los ceros del integrando. Así en los extremos de cada subintervalo el integrando vale 0 y podemos explotar esta información.

Una fórmula de integración numérica que se presta para ser utilizada es la de Gauss-Lobatto. Vamos a citar el caso particular de la regla de 5 puntos en el intervalo [-1, 1]

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = w_1 f(-1) + \sum_{i=2}^{4} w_i f(x_i) + w_5 f(1)$$

donde

$x_2 = -0.65465367$	$w_2 = 0.5444444$
$x_3 = 0$	$w_3 = 0.7111111$
$x_4 = -x_2$	$w_4 = w_2$

Si $f(-1) = f(1) = 0$, entonces no es necesario calcular el primer y último término, ahorrando con esto operaciones.

Las ideas anteriores pueden ser usadas en concreto de la forma siguiente. Vamos a ver el caso del cálculo de los coeficientes b_n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx$$

mediante un cambio de variable adecuado, se puede usar la regla de Gauss-Lobatto en cada subintervalo $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$, en cuyos extremos el integrando es 0.

En la práctica esto nos arroja mejores resultados que otras reglas de integración numérica que tienen un número similar de evaluaciones del integrando, como pueden ser Simpson compuesto(5 puntos), Newton-Cotes de 5 puntos y Gauss de 3 puntos.

Referencias Bibliográficas:

- **Kahaner, D.; Moler, C. y Nash, S.** (1989), *Numerical Methods and Software.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall.
- **Davis, P. y Rabinowitz, P.** (1984), *Methods of Numerical Integration, 2nd Ed.* New York: Academic Press.
- **Jiménez, J.** (1990) Derivando con la calculadora. *Educación Matemática.* 2(3), (pp. 56-59)
- **Rivaud, J.** (1987) Acerca del cálculo diferencial e integral. *V Coloquio del Depto. de Matemáticas. Cinvestav-IPN.* México.
- **Rivera, A. y López, E.** (1994) Fracasos en el cálculo numérico a la Arquímides del número π. *El Irracional, No. 19,* 7-8.

Utilización del concepto de internalización como fundamento para el diseño de la estructura e interfaz de un software educativo

Manuel Juárez Pacheco y José Luis Ramírez Alcántara
Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico(cenidet)
mjuarez@ cenidet.edu.mx

1.- Introducción.

El motivo de este trabajo es presentar una forma explícita de diseño de software para educación matemática, que sea técnicamente viable desde la perspectiva de la ingeniería de software y que al mismo tiempo respete los conceptos de las teorías psicológicas y pedagógicas, con las que originalmente se describió el problema y su solución didáctica.

El software que se incorpora al proceso educativo se diseña con criterios comerciales más que pedagógicos y además el diseño pedagógico y el diseño computacional aparecen separados.

A continuación se describen, esquemáticamente, los conceptos teóricos, psicológicos y pedagógicos de acuerdo a la teoría de la actividad , y los elementos computacionales que se utilizaron para diseñar el software propuesto. Para finalizar se muestran, como ejemplos, algunas pantallas donde se aprecia su distribución gráfica y el tipo de interacción que un alumno podría realizar con el software.

2.-Un problema educativo del Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (*cenidet*).

El problema se ubica en el nivel de educación superior tecnológica donde se presenta una deficiencia en el área de Matemáticas. Particularmente en los aspirantes a la maestría en Ciencias de la Computación cuando abordan el estudio de la lógica de primer orden, donde la primera dificultad *es la traducción de enunciados* del lenguaje natural a .fórmulas bien formadas (**FBF**).

3.- Resumen de la solución pedagógica.

Utilizaremos dos conceptos de Vigotsky: a) el de "zona de desarrollo próximo" que explica las relaciones entre instrucción y desarrollo, ya que esta zona se crea en la instrucción, y b) el de "internalización" que explica el desarrollo de las funciones psíquicas superiores del sujeto a partir de sus interacciones sociales.

Ambos conceptos han sido modificados de tal manera que expliciten los elementos que en los enunciados originales no aparecen. Una propuesta para aclararlos surgió de la teoría que actualmente conocemos con el nombre de la "Formación por etapas de las acciones mentales", la idea central de la teoría es que la obtención de conocimientos se lleva a cabo en el proceso de actividad del estudiante, como resultado y con la condición de que cumpla determinado sistema de acciones y operaciones.

Es justamente ese sistema de acciones y operaciones lo que le permitirá al estudiante y al profesor controlar y, en su caso, corregir cada etapa de asimilación en el proceso pedagógico.

De acuerdo con los conceptos antes planteados y retomando la definición del problema educativo, la solución propuesta debe explicitar la estructura de la actividad a internalizar, en este caso la **habilidad para traducir de lenguaje escolarizado a FBF de la lógica proposicional**. Esta habilidad debe ser descrita en términos de su *estructura interna* y en términos de su *función de orientación didáctica.*

Reconocemos en la *estructura interna* las siguientes acciones y operaciones a) comprender el enunciado; b) analizar el enunciado; c) representar; d) verificar. En la *función de orientación didáctica* (base orientadora de la acción) se tienen que especificar las operaciones que involucra la ejecución de cada una de las acciones identificadas como se muestra a continuación:

ACCIONES **OPERACIONES**

COMPRENDER EL ENUNCIADO: leerlo varias veces. Expréselo con sus propias palabras. Identificar conectivos lógicos explícitos (y, o, si ...entonces, no). e implícitos. Si no están explícitos, busque alguna manera equivalente en que puede aparecer el conectivo.

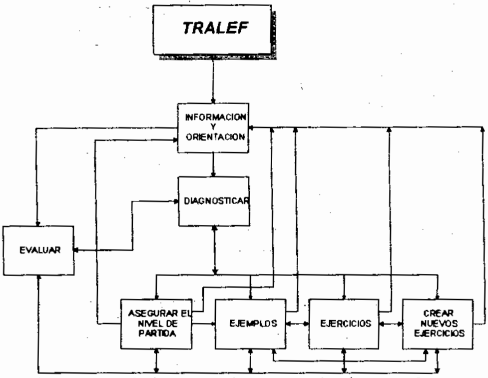
ANALIZAR EL ENUNCIADO: Identificar las proposiciones simples de acuerdo a su sentido semántico. Analizar el alcance de los conectivos tomando como referencias explícitas los signos de puntuación y el sentido global de las proposiciones. Reescribir las proposiciones haciendo explícita su asociación con los conectivos, respetando su significado original.

REPRESENTAR LOS ENUNCIADOS Y CONECTIVOS: asignar símbolos estándar a los proposiciones simples (p, q, r, s, t, etc.). Asignar símbolos estándar a los conectivos lógicos $(\wedge,(y),\vee(o),\neg(no),\rightarrow\ (si-entonces))$. Agrupar proposiciones y conectivos, para construir la fórmula proposicional, de acuerdo con la definición de FBF. Comparar la agrupación de la fórmula resultante con las reglas de asociación de los conectivos dadas en la definición de las FBF.

VERIFICAR LA FORMULA PROPOSICIONAL OBTENIDA: revisar la agrupación de la fórmula en términos de su delimitación por paréntesis. Verificar que la FBF respete el sentido del enunciado original.

A partir de lo anterior, el siguiente paso es transferir de un plano concreto e interpsicológico a un plano intrapsicológico la representación de la acción. La transferencia se da en las diferentes etapas del proceso didáctico, donde es esencial la utilización de la base orientadora y los elementos de apoyo (tabla de equivalencias semánticas de los conectivos, definiciones, etc.).

4.-Diseño del apoyo didáctico:

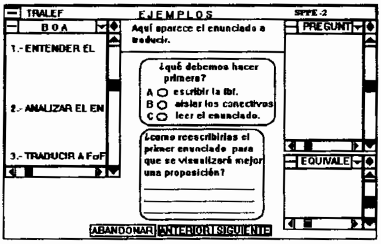


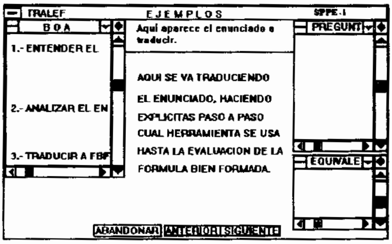
De acuerdo con los principios de la Ingeniería de Software, después de definir el objetivo que el apoyo didáctico (programa de ejercitación para apoyar el desarrollo de la habilidad de **traducción de lenguaje escolarizado a FBF**. **(TRALEF))** debe cubrir, se procedió a definir lo que se representaría en el software, esto es: algunas de las etapas del proceso didáctico, la base orientadora, los elementos de apoyo, y una modelación de las posibles interacciones del estudiante. La descripción formal de lo anterior se hace, según la ingeniería de software, en la "vista panorámica del sistema" y en el "modelo conceptual". En el esquema sólo se muestra el nivel funcional y más general del sistema, cada una de las funciones tiene una estructura propia y responde a algunos de los aspectos de la solución didáctica.

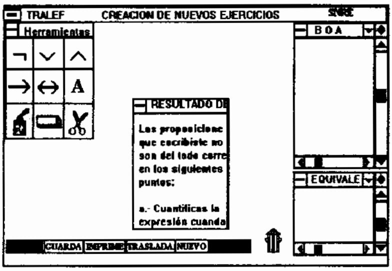
La primera descripción que modela la interacción con el estudiante en términos de los recursos de software y hardware, se hace en el documento de "definición de requerimientos" donde además de la descripción escrita se especifica el diseño de la interfaz.

5.- La teoría de Vigotsky en las interfaces del TRALEF.

La *teoría de la actividad*, en la instrumentación didáctica del software, se refleja en la presentación e interacción del usuario con el programa en las siguientes funciones: ejemplos, ejercicios y creación de nuevos ejercicios. Se utilizan ventanas en las que aparece la explicitación de la acción, la base orientadora, las preguntas de control y la retroalimentación permanente. Estas actúan de acuerdo al desempeño y dificultades que el estudiante va teniendo en los diferentes módulos.







Las anteriores son algunos ejemplos de la interfaz con el usuario:

En los ejemplos y en los dos primeros niveles de ejercicios se despliegan todas las herramientas, en los últimos niveles éstas no se despliegan automáticamente. Un módulo permite la edición y creación de nuevos ejercicios.

6.- Conclusiones.

Es posible el desarrollo de material didáctico automatizado que auxilie en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, a condición de que quien lo diseñe y lo produzca, no sólo conozca el contenido, sino también para qué servirá ese contenido y cómo debe el alumno acceder a su manejo instrumental. Esto es, cuáles son las habilidades y capacidades que el alumno deberá desarrollar y cómo el apoyo didáctico auxiliará ese desarrollo. Una de las tareas urgentes e importantes que quedan por realizar es la evaluación del software como producto computacional y como apoyo didáctico.

Referencias Bibliográficas:

- **ANSI / IEEE** (1984). Std 830. IEEE *Guide to Software Requirements* Specifications. N.Y. IEEE Inc.
- **Werner, J. (1981).** *Conferencias sobre la enseñanza de la matemática*, Cd. Habana, Ministerio de educación, volúmenes 1 a 4.
- **Vigotsky, L.** (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, México, Crítica-Grijalbo.

Propuestas de un sistema didáctico para la enseñanza de las integrales con el apoyo de un asistente matemático

Iván Valido G, Marta Fernández C
Facultad de Ingeniería Industrial
I S P J A E, Ciudad de la Habana

Introducción:

El empleo de las computadoras, en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en nuestro centro, se ha ido incrementado utilizándose en:

- Laboratorios donde se emplean programas profesionales o se elaboran programas para la resolución de problemas propuestos.
- Clases Prácticas (CP) en las que se utiliza algún asistente matemático con el objetivo de mostrar gráficos o realizar operaciones que presentan determinado grado de complejidad.

En el presente trabajo se exponen algunas reflexiones y experiencias sobre el empleo de un ***asistente matemático*** en la enseñanza de la *Integral Definida.*

Antecedentes:

Atendiendo a la capacidad graficadora de los ***asistentes matemáticos*** más populares en nuestras universidades se diseñaron dos actividades docentes:

- Conferencia. El docente utilizará la computadora para mostrar gráficos, realizar operaciones laboriosas, cálculos complicados, etc.
- Clase Práctica. Los estudiantes trabajarán en la computadora uilizando programas y funciones preparados para la resolución de problemas relacionados con los contenidos de la Conferencia.

En la determinación del software adecuado se consideraron esenciales los parámetros siguientes:

Cálculo simbólico. ② **Capacidad gráfica.**

③ **Potencial numérico.** ④ **Facilidad de operación.**

se seleccionó la versión 3.13 de **DERIVE** (**DERIVE XM 3.01** en algunos casos), por ser este software muy "*amigable*" y ya conocido por los estudiantes desde el Primer Semestre de la carrera.

Para impartir la conferencia donde se tratan los conceptos preliminares de la integral definida y el propio concepto se elaboraron dos ficheros.MTH que contienen diversas funciones DERIVE relacionadas con los contenidos impartidos.

1. Fichero GSUM.MTH

"FICHERO GSUM.MTH PARA EL TRABAJO GRAFICO DE LA INTEGRAL DEFINIDA"

DIBUJA_CURVA(x)

DIBUJA_REGION(a, b, x, n)

"GRAFICOS DE SUMAS INTEGRALES"

GSUM_INF(a, b, x, n)

GSUM_SUP(a, b, x, n)

GSUM_RIEMANN(a, b, x, n)

2. Fichero SUM.MTH.

"FICHERO SUM.MTH PARA CALCULAR SUMAS INTEGRALES"

SUM_RIEMANN(a, b, n, x)

INF_DARBOUX(a, b, n, x)

SUM_PUNTO_MEDIO(a, b, n, x)

SUM_RIEMANN(a, b, n, x)

SUP_DARBOUX(a, b, n, x)

SUMAS_INTEGRALES(a, b, n, x)

lim SUMAS_INTEGRALES(a, b, n, x)

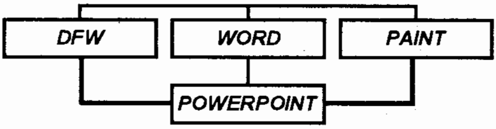
La Clase Práctica fue diseñada de modo que en ella los estudiantes empleen las funciones DERIVE contenidas en los ficheros GSUM.MTH y SUM.MTH para dar respuestas a los ejercicios formulados. Mostramos a continuación uno de los ejercicios de la CP.

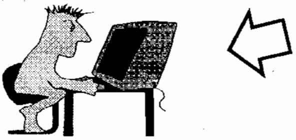
1. Definir la función F(x): $=x^2e^x+1$
- **a. Representar gráficamente y=F(x)**
- **b. Verificar que F es creciente en [0, 2].**
- **c. Evaluar P(0, 2, 10). Explique el resultado obtenido.**
- **d. Evaluar GSUM2 y GSUM3 par a=0 b=2 y n=10. Representar gráficamente y explicar su significado.**
- **e. Qué relación existe entre SUM2(0, 2, 20) y SUM3(0, 2, 10)?**

La conferencia y dfw:

La aparición de la versión 4.0 de DERIVE (DFW) sobre el entorno de Windows'95 impone la realización de modificaciones en cuanto a la forma de impartir las actividades anteriores haciendo un uso más eficiente del asistente como "medio audivisual de enseñanza".

A continuación se exponen algunas ideas sobre la preparación e impartición de una conferencia haciendo uso, en lo fundamental, de cuatro aplicaciones windows: WORD, DFW, PAINTBRUSH y POWERPOINT.





Elaboración de la conferencia:

Para explicar esta parte del trabajo se ha tomado como ejemplo la conferencia "La integral definida.". Una vez preparada la conferencia y seleccionados gráficos, conceptos y teoremas que se desean mostrar mediante presentaciones se procede a:

➡ Escribir la conferencia en Word.

➡ Salvar en un fichero la conferencia ya terminada como documento word, por ejemplo CONF_1.DOC.

➡ Los gráficos que requieran información adicional a la proporcionada por DFW, pueden ser tratados y " *maquillados*" en el Paint, (sombras, letreros, colores, etc.).

➡ Las presentaciones se confeccionan en el Powerpoint.

Impartición de la conferencia (Aula Especializada)

El docente mostrará a través del Powerpoint las presentaciones que ha confeccionado, realizando los comentarios necesarios.

Se muestran a continuación algunas de estas presentaciones.

➡ Lámina 1. Contiene titulo y sumario de la conferencia.

LA INTEGRAL DEFINIDA

SUMARIO: 1. Introducción geométrica.

2. Definiciones preliminares.

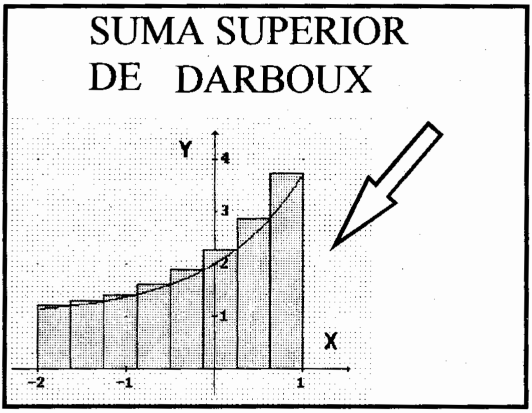
3. sumas integrales.

4. Definición. Integral de Riemann.

5. Condiciones de integrabilidad.

➡ Lámina 2. Muestra la caracterización de determinados tipos de regiones.

➡ Lámina 3: Gráfico *"Área bajo la curva "* construido con la función DIBUJA_REGION que aparece en el fichero GSUM.MTH.



➡ Lámina 4. Gráfico *"Suma integral superior de Darboux"* construida mediante la función GSUM_INF(a,b,x,n). Este gráfico ha sido *"maquillado"* en el Paint.

Además, desde su *exhibición* se puede abrir DFW con el objetivo de modificar algunos de los parámetros: a, b y n.

En la exhibición de esta lámina, al hacer click en el titulo ***SUMA SUPERIOR DE DARBOUX*** se abre la pantalla Algebra de DFW desde la cual podemos modificar los parámetros de la función.

➡ Lámina n. Esta presentación puede destinarse para mostrar un resumen de los aspectos más importantes de la conferencia.

La clase práctica en el laboratorio:

La cpl debe ser cuidadosamente confeccionada por el docente teniendo en cuenta los objetivos que con ella se pretenden alcanzar, así como las habilidades que se desean desarrollar en los estudiantes. Las acciones a ejecutar por ellos deben tener asociadas un sistema básico de habilidades matemáticas y no deben faltar las siguientes:

- ***interpretar***
- ***calcular***
- ***recodificar***
- ***identificar***
- ***graficar***
- ***algoritmizar***

Es recomendable escribir los enunciados de los ejercicios de la CPL en word y de esta forma salvarla en un fichero .DOC de modo que los estudiantes puedan disponer de ellos, lo que simplifica el trabajo en el Laboratorio.

Conclusiones:

Las tareas que la Pedagogía Moderna de la Educación Superior impone a los docentes, no pueden ser acometidas sin el empleo y dominio de los más modernos medios de enseñanza.

Los medios de enseñanza que se utilizan en una actividad docente son efectivos en la medida que se haya realizado una cuidadosa preparación metodológica. No se trata de impresionar al estudiante con las virtudes de la computadora, no es ese el objetivo. El papel de este medio de enseñanza radica esencialmente en establecer los vínculos entre los niveles sensoriales y racionales del conocimiento, entre lo concreto y el pensamiento abstracto; ayudando a hacer más comprensibles los conceptos.

Establecer el nexo entre lo sensorial y lo racional, y entre éste y sus aplicaciones prácticas, así como permitir la búsqueda de nuevas interrogantes y sus soluciones, son las tareas más importantes de los medios de enseñanza en el marco de la Educación Superior, y es precisamente en esta vertiente que proponemos explorar el uso de la computadora, símbolo de nuestros tiempos.

Referencias Bibliográficas:

- **Castro, I.** (1994). *"Cómo hacer matemática con DERIVE"*. Reverté Colombina.
- **González, V.** (1985). *"Los medios de enseñanza en la Educación Superior"* Ciudad de La Habana.
- **Hernández, H.** (1990). *"Saltar a la vista lo evidente"*. Revista cubana de Educación Superior Vol X, No.1..

Metodos constructivistas en la enseñaza de las matematicas con Isetl

Manuel Antonio Montero Gamas
clasemat@itc.edu.co
Instituto Técnico Central "La Salle"
Santafe de Bogotá, D. Colombia
http://www.itc.edu.co/~clasemat

Operaciones basicas en ISETL:

Conjuntos: Es una colección de objetos donde el orden no interesa.

Tuplas: es una colección de elementos donde el orden si interesa, por ejemplo (1,2,3,4) y (3,2,1,4) on dos tuplas diferentes.

Definimos el conjunto A={1,1.3,1.6,1.9,2.2,2.5,2.8,3.1,3.4,3.7,4} de la forma siguiente;

> A:= {1,1.3,1.6,1.9,2.2,2.5,2.8,3.1,3.4,3.7,4};

Una alternativa equivalente es:

> A:={1,1.3...3};

En forma general podemos definir un conjunto así:

A={ x: condiciones en x}

En esta forma ISETL define un conjunto. Por ejemplo el conjunto anterior:

> A:= {x/3: x in {3..9}};

El operador **in** se utiliza para decir que x pertenece al conjunto {a..b}.

El operador **subset** se utiliza para decidir si un conjunto es subconjunto de otro, si esto es así , se devuelve TRUE (verdadero) $B\subset A$, en caso contrario se devuelve FALSE (falso), $B\not\subset A$.

Si queremos hallar la suma de los elementos de un conjunto o tupla utilizamos el signo (%) porcentaje y el signo más (+); lo mismo si queremos hallar la unión de conjuntos.

>%+A;

> 27.500000;

Decimos que un Elemento x pertenece a un Conjunto A si x es un elemento de este conjunto.

Es decir $x\in A$. en ISELT escribimos x in A; si esto es cierto el programa nos devuelve True.

Definimos el conjunto A por ***comprensión,*** esto lo hacemos dando una condición al conjunto A que nos pueda generar los elementos de este conjunto :

A:={x/3: x in {3..9}};

Notemos el uso de IN, el cual nos indica que x pertenece al conjunto {3..9}={3,4,5,6,7,8,9}.

Podemos Denotar este Conjunto por ***Extensión*** Utilizamos A; y tenemos el siguiente resultado:

{2.333, 2.667, 1.667, 3.000, 1.333, 1.000, 2.000};

Un Conjunto C es un Subconjunto del Conjunto A, si todo elemento de C pertenece a A.

Escribimos $C \subseteq A$; en Iselt, C Subset A, si esto es cierto se devuelve True.

Por Ejemplo:

> C:={1,2,3,4};B:={2,3}; subset C;

true;

Operaciones básicas:

UNION: la Unión entre conjuntos es un nuevo conjunto formado por los elementos que están en el primer conjunto y los elementos del segundo conjunto.

A:={1,2,3};B:={4,5,6};A +B;

(coloque su respuesta)

A unión B; (coloque su respuesta)

EJERCICIO:

Realice un ejemplo con conjuntos A,B,C,R. las siguientes definiciones.

A:={1,2,3,4,5};B:={1,3,5,7,8};C:={2,3,5,8,9,10,11}; R:={x: x in {1..15}};

A inter B; A inter C; A-B; R-B;

D:={[x,y]: x in A, y in B};D;

pow(A); #pow(A); npow(A, 2);

Creación de funciones

Para crear una función utilice la palabra reservada **func** ·

>f:= func(x); $parámetro de la función

>> return x**2; end;

Como la función tiene parámetros, en la llamada a la función debe contener un parámetro por ejemplo:

>f(3);

>9

Si queremos graficar la función f, procedemos así:

>Plot (f); $ se realiza la gráfica en el intervalo [-10,10] por defecto.

>Plot(f,a,b); $ se gráfica la función f en el intervalo [a,b].

>Plot(f,a,b,c,d) ; & se gráfica la función f tomando valores de x en [a,b] y valores de y en [c,d].

Para desplazarnos en el editor gráfico lo hacemos con las teclas de cursor, si queremos salir del editor oprimimos la tecla (q), si queremos realizar un zoom debemos oprimir la tecla z y luego marcamos el rectángulo donde queremos hacer el acercamiento. Y oprimimos nuevamente z.

Distancia entre dos puntos:

Nos ubicamos en el plano cartesiano, para esto colocamos el siguiente punto a(-3,5); en ISETL procedemos así:

>a:=[-3,5];

En este momento definimos el punto a, ahora podemos ubicarlo en el **plano,** para esto digitamos:

>plot(a);

Sin abandonar el editor gráfico in con el movimiento del cursor ubicamos los puntos (1,3) ,

(-3,5), (-3,-1).

Salga del editor gráfico digitando la tecla Q.

Ahora dibujamos un segmento de línea, para esta parte utilizamos la función que nos dibuja un vector. (VECTORS).

Queremos dibujar el siguiente segmento:

(2,3) ______________________________ (7,3)

¿Cuál es la distancia del punto (2,3) al punto (7,3)?

¿Cuál es la distancia entre el origen y un punto que esta n unidades a la izquierda del origen (formando un segmento horizontal)?

¿Cuál es la distancia entre el origen y un punto que esta n unidades arriba o abajo del origen (formando un segmento vertical)?

Grafiquemos el segmento (2,3), (7,3).

>S:=func(p); vectors(p,falso);end;

> p:={[[2,3],[7,3]]}; S(p);

>p:={[[2,3],[7,3]],[[7,3],[7,10]]};S(p);

Halle la distancia entre cada uno de los segmentos formados por (2,3) y. (7,3) ; (7,3) y (7,10).

Forme el triángulo determinado por estos puntos. Este es un triángulo rectángulo, halle la hipotenusa de este triángulo y el resultado compárelo con la medida que usted midió manualmente en el editor gráfico.

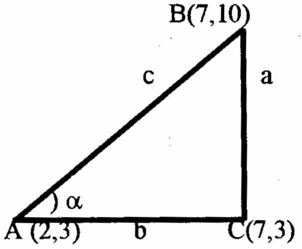
Escriba la ecuación de la distancia de dos puntos A,B.

Ecuación de la recta

Para hallar la ecuación de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), debemos hallar primero la inclinación de la recta con respecto al eje X, procedemos de la siguiente forma:

hallemos la inclinación de la recta que pasa por los puntos (2,3) y (7,10).

En el apartado anterior formamos el triángulo rectángulo



La inclinación de la recta que pasa por el punto (2,3), (7,10) es el valor de la tangente del ángulo α, para hallar este valor aplicamos la función Tangente:

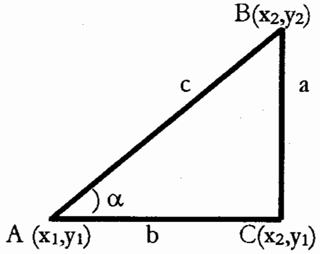
$$\tan \alpha = sen/cos = a/b;$$

$$\text{Tan } \alpha = \frac{a}{b} = \frac{10-3}{7-2} = \frac{7}{5} = 1.4000$$

El valor del seno es la distancia de $|CB|$ y el coseno es la distancia $|AC|$, el cociente de estos valores que es la tangente forma la inclinación de la recta, esta inclinación la llamamos PENDIENTE (m) luego la pendiente de una recta es: Tan α =m

si la recta pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), hallemos la ecuación de la pendiente:

Formemos el triángulo ABC rectángulo con vértices en:



-halle la pendiente de esta recta:

-Sí los puntos son (x_1, y_1) y (x,y), , halle la pendiente de esta recta, despeje el valor de $(y-y_1)$, este resultado es la ecuación de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x,y).

- Halle las coordenadas del punto medio del segmento (2,3) y (10,3)

-Escriba las coordenadas del punto medio del segmento (x_1, y_1) y (x,y),

Otras aplicaciones

Una de las funciones de la enseñanza de las matemáticas con ISETL es la construcción de funciones.

Construyamos una función computarizada para resolver una ecuación simple: x+3=5;

el programa debe solicitar los valores de a y b y devolver el valor de X ,

```
> ecuación := func(a,b); return b-a; end;
```

Utilizamos la palabra reservada FUNC que la utilizamos siempre que queramos construir una función; para nuestro ejemplo debemos digitar:

```
>ecuación(3,5);
>2;
```

El resultado es 2 . luego 2+3=5; que es lo que queremos.

Podemos resolver algunos problemas de esquemas matemáticos por la construcción de funciones.

Construyamos la función computarizada **Permutación** ; esta función nos permitirá hallar todas las permutaciones $_n p_r$:

debemos crear la función que nos de el factorial de un numero n.

```
>      factorial:=func(n); local p;  p:=1;
>>      if n<0 then return ["no puedo hallar con números negativos"];
>>      else for i in [1..n] do ;  p:=p*i;  end; print ["el factorial es: ",p]; end;
end;
>      factorial(4); factorial(3); factorial (0);
["el factorial es: ", 24];OM;["el factorial es: ", 6];OM;["el factorial es: ",
120];OM;
```

Ahora nuestra función permutación queda así:

```
>      permutacion:=func(n,r); local c; local d; c:=fa(n); d:=fa(n-r); return
c/d; end;
>      permutación (5,3);
60.000000;
```

Solo debemos cambiar la línea de >> print ["el factorial es: ",p]; por >>return p; en la función factorial.

INCORPORACIÓN DE DISTINTAS PERSPECTIVAS

El juego, el cuento y la poesía en los libros de Matemática

Jenny Oviedo de Valerio y Vilma Delgado Estrada
IIMEC, Universidad de Costa Rica

Resumen:

En este trabajo se explica, a grandes rasgos, la propuesta metodológica presentada en los libros de matemáticas del primero al cuarto año, que las autoras escribieran con el fin de dotar a las escuelas primarias de Costa Rica, de textos que respondan a los nuevos programas del Ministerio de Educación Pública y a la realidad actual. La metodología que se fomenta mediante el complejo didáctico formado por el libro de texto, el cuaderno de actividades y la guía del maestro, tiene un enfoque constructivista y una visión integral y humanista de la enseñanza. Se propicia que el aprendizaje de las matemáticas sea agradable, que los educandos participen activamente en la construcción de sus conocimientos, en una constante interacción con su medio y realizando actividades adecuadas a su nivel de desarrollo intelectual y psicológico. En esta metodología el juego, el cuento y la poesía adquieren importancia, no sólo como motivadores del aprendizaje, sino también, como recursos mediante los cuales se fomenta la creatividad y fantasía de los educandos y la formación de valores morales e intelectuales.

I. Introducción.

En este trabajo se explica, a grandes rasgos, la propuesta metodológica presentada por las autoras en los complejos didácticos de matemática de primero a cuarto años de la escuela primaria, que forman parte de la serie "Hacia el Siglo XXI", elabora por la Editorial de la Universidad de Costa Rica entre los años 1995 y 1996 y en convenio con el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP). Esta serie constituye un aporte importante a la educación del país, al dotar a las escuelas primaria y secundaria de textos oficiales para cada una de las cuatro asignaturas básicas: español, estudios sociales, ciencias y matemáticas e incluye, para cada una de ellas, *complejos didácticos* formados por el libro de texto, cuaderno de actividades y guía para el maestro, para cada uno de los años del primero al sexto de primaria.

Características y metodología: La metodología que se fomenta, se basa en un *enfoque constructivista* y una visión *integral* y *humanista* de la enseñanza, cuyo ideal supone una fuerte formación científica y tecnológica de los individuos. Se considera, que la enseñanza de la matemática, incluye dentro de sus objetivos, además de aquellos relativos al aprendizaje de los contenidos matemáticos y al de fomentar el desarrollo del razonamiento de los educandos, un objetivo más general: desarrollar individuos *autónomos*, es decir, independientes, críticos, creativos, investigadores, reflexivos; comprometidos con su sociedad y con su medio; capaces de amar y disfrutar la alegría de vivir, todo lo cual, redundará en un sano incremento de su autoestima.

Con esta metodología se pretende romper con la enseñanza tradicional y salirse del marco de las llamadas matemáticas modernas de los años sesenta y setenta. En este nuevo enfoque, se enfatizan los aspectos intuitivos, los procesos de construcción de los conceptos, más que los resultados acabados. Se propicia, que el aprendizaje de las matemáticas sea algo *agradable, dinámico,* que los educandos participen *activamente* en la construcción de sus conocimientos, en una constante interacción con su entorno social y físico, realizando actividades adecuadas a su nivel *de desarrollo intelectual y psicológico.*

Como corolario de estos fundamentos teóricos, y tomando en cuenta que el pensamiento de los escolares es predominantemente concreto, que requieren *observar* y *manipular* materiales concretos, realizar experiencias con él, establecer relaciones, expresar verbal o gráficamente los conocimientos que van construyendo, en esta propuesta metodológica se le da gran importancia a este tipo de actividades. Por otra parte, también se enfatizan las acciones que animan a los educandos a *pensar* y a *recordar* los resultados de su propio pensamiento, más que las acciones que los conducen a memorizar símbolos y mecanismos o técnicas específicas para producir respuestas escritas. En ese sentido, se propicia el *cálculo mental* de resultados con las diferentes operaciones aritméticas, la *solución de problemas.* También, se le devuelve a la geometría su importancia y se fomenta la *interacción social* entre niños y niñas y con los educadores, como una actividad indispensable para facilitar el desarrollo de la lógica de los escolares.

II. Descubrir y construir jugando:

Los niños y las niñas, no realizan la elaboración intelectual en el vacío, sino, en una interacción activa con su mundo circundante, por esta razón, la enseñanza debe estar estrechamente ligada a la realidad inmediata de niños y niñas, partiendo de sus propios intereses. El *juego* es una actividad que los niños y las niñas realizan de una manera natural y con regocijo; el juego *es su trabajo, están interesado en él y tiene sentido para ellos.* Entonces, en estos complejos didácticos, propiciamos una metodología que proporcione un ambiente lúdico, de juego y entretenimiento, porque los juegos, además:

- *Proporcionan un motivo o razón para hacer y matemática.* Por ejemplo, al jugar "Gana la mayor" con dos tarjetas, los niños y las niñas son capaces de llegar a comprender y memorizar sumas, no porque el maestro o maestra así lo exige, sino para poder jugar con sus compañeros.
- *Proveen situaciones agradables de aprendizaje de las matemáticas.*
- *Estimulan a los niños y niñas a pensar más activamente* y no en forma mecánica aplicando procedimientos aprendidos de memoria.
- *Proporcionan oportunidades para promover el cálculo mental* de las operaciones aritméticas.
- *Proveen situaciones para desarrollar la socialización del conocimiento,* aspecto fundamental en la construcción de la lógica matemática. Al jugar, los mismos niños y niñas supervisan que los resultados de las operaciones sean correctos, y en caso de error, ellos mismo se corrigen.

- *Propician el desarrollo de la moralidad,* ya que en los juegos, las reglas pueden ser modificadas, impulsadas, respetadas y defendidas por los mismos niños y niñas.
- *Fomentan la creatividad* al estimular a los niños y niñas a inventar sus propias reglas y juegos y sus propias explicaciones a errores cometidos.
- *Estimulan la confianza en sí mismos y su autoestima,* porque en los juegos la retroalimentación viene de otros niños o niñas o de ellos mismos.

En otras palabras, el juego es una especie de ensayo donde se tolera que el niño y la niña se equivoquen y se corrijan sin temor a una mala calificación y en esa interrelación con sus condiscípulos van construyendo sus conocimientos. El juego, entonces, constituye un recurso que le permite a los educandos manejar, de una manera adecuada, la ansiedad que genera el aprendizaje, evitando así, en gran parte, la formación de barreras al aprendizaje. Todo lo anterior acredita la importancia que se le da al juego en estos complejos didácticos, donde tanto en los texto como en los cuadernos de actividades y en la guía para el maestro, se propone una gran diversidad de este tipo de actividades.

III. El juego, el cuento y la poesía como agentes motivadores e integradores:

En estos libros hemos usado el juego, el cuento y la poesía, no sólo como elementos de animación de fondo, que hace más grato el curso del libro, sino, sobre todo, como *agentes motivadores* del aprendizaje de las matemáticas, para promover la construcción de valores morales e intelectuales y para fomentar la creatividad y la interacción social entre niños y niñas, aspectos estos últimos dos, fundamentales en la construcción del pensamiento. Además, los cuentos y las poesías se utilizan en estos textos como *elementos integradores:*

Cada libro está organizado con cuatro o cinco ***bloques*** o pequeños libros y cada uno de los *bloques* se inicia con un cuento o una poesía donde se introduce el eje temático que girará alrededor de los contenidos matemáticos, pero se proyectará a fomentar y a fortalecer una serie de valores, o costumbres y tradiciones. Mediante la historia introducida en el cuento o la poesía se van presentando situaciones problemáticas a los personajes de la historia, cuya solución conlleva la elaboración o construcción de conceptos relativos a alguna de las áreas de la matemática. De esta manera, se van integrando diferentes conceptos y relacionando las matemáticas con otras áreas del quehacer humano, destacándose *la importancia y utilidad* de esta asignatura en la vida diaria de los estudiantes.

Por ejemplo, en primer grado, al inicio del Bloque 5, con la poesía "Concurso de frutas" se anima a los niños y niñas a observar la forma de las frutas y se les motiva a descubrir cuál es la fruta más esférica y de paso, a observar e identificar las formas de los sólidos en general. Se continúa con el tema de las frutas: la forma de los envases de los jugos de frutas; los lugares donde se produce más una determinada fruta; la capacidad de los envases; la cantidad de naranjas en tantas bolsas de naranjas; la cantidad de árboles frutales en un vivero; lo que se paga en la feria del agricultor al comprar tantos mangos; cuánto cuesta hacer una ensalada de frutas; una encuesta sobre la fruta preferida; etc. Así, teniendo como contexto el tema introducido en la poesía, se desarrollan *de una manera integrada contenidos relativos a las diferentes áreas de las matemáticas* y mediante las actividades y los problemas presentados en los tres libros del complejo didáctico, se orienta a los niños y niñas para que construyan los conceptos matemáticos a partir de las vivencias de los personajes del libro y las suyas propias.

Otro ejemplo, el Bloque 2 del texto de tercer año se inicia con la poesía "Mil, mil", donde se introduce un cuento de un niño llamado Marcial, que soñó manejando un tren cuyos vagones cargaban mil cosas cada uno. En el marco de esta historia se construyen trenes, se observa la forma de algunas figuras geométricas, se calculan sus perímetros; se construyen los números hasta 10 000, las tablas de multiplicar, las multiplicaciones por 1000; se hacen compras; se juega con los números y se analizan unidades, decenas, centenas, unidades de millar; se miden trenes; se hacen encuestas, etc.

En conclusión: En estos libros, bajo un marco teórico en que se estimula la *autonomía*, el niño y la niña son llamados a descubrir las relaciones y las ideas, a recrearlas, de una manera agradable, tomando en cuenta el mundo de la fantasía que motiva al niño y a la niña por medio del juego, del cuento y de la poesía.

Referencias Bibliográficas:

- **Delgado, V. y Oviedo de Valerio, J.** (1996) *Texto. Matemáticas 2 y Matemáticas 4.* Serie: Hacia el Siglo XXI. Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. Edit. Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.
- **Delgado, V. y Oviedo de Valerio, J.** (1996). *Cuaderno de actividades. Matemáticas 2 y Matemáticas 4.* Serie: Hacia el Siglo XXI. Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. Edit. Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.

Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos
El caso de los problemas de "compañías"

Bernardo Gómez.
Departamento de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València

Introducción:

Esta comunicación se ubica en una investigación centrada en la enseñanza de la proporcionalidad, y se circunscribe a una de las partes de la fase exploratoria en la que se hace un análisis didáctico para fundamentar un marco descriptivo de la problemática, que posibilite establecer cuestiones centrales para indagar en una fase empírica posterior. La metodología adoptada recurre a diversos tipos de análisis cualitativos, uno de ellos es el análisis de los libros de texto. A continuación se exponen algunos primeros resultados derivados de este análisis.

La enseñanza de la proporcionalidad:

En el marco de la organización tradicional de los libros de aritmética

La proporcionalidad aparece en los libros de Aritmética desde tiempo inmemorial, su enseñanza se enmarca en una organización tradicional del contenido de los mismos en la que se pueden distinguir dos partes: una que lleva a conocer los procedimientos relativos a las diversas operaciones, y otra que lleva a la resolución de toda clase de cuestiones con los números, ya sean relativas a propiedades, o ya sean relativas a aplicaciones, que es donde se ubica la proporcionalidad y los problemas de la aritmética comercial.

En el marco de los cambios metodológicos en los libros de texto.

En la historia reflejada en los libros de texto la enseñanza de la proporcionalidad ha sufrido cambios metodológicos que se pueden vincular a tres grandes épocas:

1. Hasta el final del siglo XVIII, en los libros de aritmética la proporcionalidad se ubicaba en un bloque de contenidos donde se estudiaban razones y progresiones, y después sus aplicaciones. El enfoque metodológico seguía un estilo en el que se ponían multitud de casos o cuestiones concretas semejantes, puestas de innumerables modos, sobre las que se establecían como reglas los variados medios particulares de que se valían para resolverlos.
2. En el siglo XIX el estudio de la proporcionalidad sufre un cambio como consecuencia de que las progresiones se independizan y pasan al álgebra. El capítulo dedicado a la proporcionalidad pasa de estar organizdo en torno a la comparación de números a organizarse en torno al estudio de magnitudes proporcionales (dependientes y variables). El enfoque metodológico abandona la teoría clásica y recurre a un nuevo estilo de razonamiento aritmético basado en el análisis de la cuestión y la deducción de las consecuencias que resultan del mismo para que se pueda encontrar la solución a los problemas por discernimiento propio.

3. En el siglo XX la actividad escolar está organizada conforme a la división en grados, según la edad y condiciones intelectuales de los alumnos, bajo programas oficiales de carácter cíclico y mediante enseñanza simultánea. Para hacer posible este modelo se necesita un texto que pueda ser usado al mismo tiempo por todos los escolares de una misma clase, el libro escolar, que uniformiza la metodología, reduce el contenido y adapta su presentación a formas textuales aptas para ser memorizadas y reproducidas por los niños.

El caso de la "regla de compañías":

Para entrar en detalles acerca de la forma en que estos tres enfoques se han plasmado en las aplicaciones de la proporcionalidad, se ha elegido un ejemplo paradigmático, la regla de compañías, presente en todos los programas de aritmética y con un origen antiquísimo.

La regla de compañía tiene por objeto determinar cuanto corresponde de las ganancias o pérdidas de una sociedad o empresa a cada uno de los socios o compañeros que la componen. Normalmente el reparto de la ganancia se hace de forma proporcional al capital aportado por cada socio, y al tiempo de inversión de cada capital, Los problemas relativos a éste segundo caso no van a ser objeto de este estudio porque se reducen al primero.

1. Hasta el siglo XIX la enseñanza de la regla de compañía se organiza en torno a la presentación de un amplio surtido de casos concretos y métodos particulares de resolución. En el tratado de Pérez de Moya (1573) estos métodos son:
   a) Ordenar los datos para la "regla de tres" y usar el algoritmo cruzado.
   b) Hallar "la proporción" entre lo que ponen todos y lo que ganan todos y considerar que es la misma que hay entre lo que pone uno y lo que gana uno.
   c) Hallar la fracción que expresa que parte es lo que pone uno de lo que ponen todos, porque está es la misma que expresa que parte es lo que ganó uno de lo que ganaron todos.
   d) Hacer de la ganancia tantas partes iguales como unidades pusieron entre todos, porque cada uno ganó tantas de esas partes como unidades puso.
2. Al comenzar el siglo XIX, la enseñanza de la regla de compañías se ubica en el marco general de los problemas de reparto proporcional o prorrateo, esto es, de los problemas de distribución de un número dado **a** en partes desiguales, por ejemplo **x**, **y**, **z** que tengan entre sí las mismas razones que otros números también dados, por ejemplo **m**, **n**, **p**. En los libros generalistas se suele presentar primero la forma algebraica de resolución para después particularizarla en ejemplos concretos. Esta forma algebraica es, tal y como aparece en Vallejo (1841) y en Lacroix (1826), la siguiente:

e) Método que consiste en plantear los pares de razones iguales: $\frac{m}{n} = \frac{x}{y}$; $\frac{m}{p} = \frac{x}{z}$, despejar los valores desconocidos para ponerlos en función de uno sólo de ellos y de las cantidades conocidas $y = \frac{nx}{m}$; $z = \frac{xp}{m}$, y aplicar la condición del enunciado que liga las partes con el todo:
$$x+y+z = a \rightarrow x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m} = a \rightarrow x = \frac{ma}{m+n+p}; y = \dots ; z =$$

Algunos autores siguen presentando los métodos tradicionales en la parte aritmética de sus tratados, aunque actualizándolos en el lenguaje, reformando las explicaciones en el nuevo estilo de razonamiento aritmético, y agrupándolos bajo un mismo ejemplo. Concretamente, en la aritmética de Lacroix se presenta una versión del método c) de Moya, y un a modo de recíproco que se basa en lo siguiente:

f) Hallar las veces que lo que puso uno está contenido en lo que pusieron todos porque lo que ganó uno esta contenido éste mismo número de veces en lo que ganaron todos.

También hay una versión del método d) en la que se hace mención explícita al cálculo del "valor unitario". Este método, conocido como de "reducción a la unidad", se basa en:

d') Determinar el valor de la cantidad de la misma especie de la incógnita que corresponde a el valor uno de la otra cantidad, porque conocido ya este valor se determina el de la incógnita por una multiplicación o división (el valor de la incógnita es tantas veces este valor como indica su correspondiente valor en la otra magnitud).

3. En el siglo XX, debido al carácter reduccionista de los libros escolares se opta por limitar o reducir los métodos de solución a uno sólo que sirva para resolver todas las cuestiones. En el curso superior de Bruño (1939) se ofrece este:

g) Plantear la serie de tasas iguales: $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = t$, despejar con ayuda de la incógnita auxiliar: **x=mt, y=nt, z=pt** ; y aplicar la condición del enunciado que liga las partes con el todo: $x+y+z=a,\ mt+nt+zt=a,\ \frac{a}{m+n+p} = t$

En cambio en Dalmáu Carles se opta por la línea de Vallejo y Lacroix con una versión modificada del método e), en los cursos superiores (1944), y una versión abreviada del mismo en los cursos inferiores (1937) que consiste en ordenar los datos para una "regla de tres" y aplicar el algoritmo cruzado, como en el método a), aunque en este caso sustentada en la resolución de problema general del reparto proporcional.

En otros textos españoles de carácter intuitivo, se opta por el método "de reducción a la unidad" sustentado en un ejemplo concreto. En la actualidad éste es el método que casi exclusivamente se utiliza en los libros de texto en vigor en España.

La naturaleza comparativa de los métodos de resolución:

El análisis de los métodos señalados antes permite discernir que no son piezas inconexas, sino que se sustentan en los mismos procesos comparativos propios de cualquier situación de proporcionalidad, a saber, la comparación de pares de cantidades de una misma magnitud (razones) o la comparación de pares de cantidades una da cada magnitud (tasa), seguido de una inferencia analógica entre los pares de razones o las tasas obtenidas. Por otra parte, estos métodos difieren en los referentes (división o fracción) que de esos procesos comparativos se toman en el contexto de los problemas. En el cuadro siguiente se sintetizan estos procesos y los referentes que subyacen en los métodos señalados antes.

	División	Fracción
Razón	Razón/división	Razón/fracción
Tasa	Tasa/división medida o partición	Tasa/Fracción

En efecto, en los métodos b), d), d') y e) se hace uso de la inferencia analógica entre el resultado de procesos comparativos multiplicativos entre cantidades de diferente especie (tasa), en uno se compara lo que pusieron todos con lo que ganaron todos y en el otro lo que uno puso con lo que uno ganó, lo que en el lenguaje algebraico se escribe así: $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = t$. En el contexto del problema estas dos comparaciones pueden hacerse en el sentido a/b o en el sentido b/a, un caso resulta de la interpretación parte-todo (fracción), y el otro de la interpretación de la división como medida: el número de veces que un dato contiene al otro, o como partición: lo que corresponde de una cantidad por unidad de la otra (valor unitario).

En los métodos c), f) y g) se hace uso de la inferencia analógica entre el resultado de procesos comparativos multiplicativos entre cantidades de la misma especie (razón), en uno se compara lo que pone uno con lo que ponen todos y en el otro lo que gana uno con lo que ganan todos, lo que en el lenguaje algebraico se escribe así: $\frac{m}{n} = \frac{x}{y}$; $\frac{m}{p} = \frac{x}{z}$. Como antes, estas dos comparaciones pueden hacerse en el sentido a/b o en el sentido b/a, un caso resulta de la interpretación parte-todo (fracción), y el otro caso de una de las interpretaciónes de la división.

Epílogo:

Esta visión de la historia de la enseñanza reflejada en los libros de texto de una aplicación paradigmática de la proporcionalidad muestra el juego de referentes y procesos comparativos usados en la resolución de los problemas. Teniendo en cuenta que éstos no están explícitos en los enunciados sino que dependen de consideraciones personales, sería interesante indagar acerca de cuáles son los aspectos que están en el origen de estas consideraciones, en particular los de tipo evolutivo o de desarrollo intelectual y los vinculados a la instrucción o al aprendizaje escolar. Cabe también cuestionarse la tendencia actual de reducir la enseñanza de la proporcionalidad a uno solo de los referentes o procesos comparativos, porque posiblemente esto tenga limitaciones o consecuencias en el aprendizaje futuro o en su disponibilidad práctica.

En consecuencia, el desafío para la investigación en marcha se centra ahora en abordar estos dos puntos, el estudio de los aspectos que influyen en las consideraciones señaladas y el estudio de la evolución, uso y disponibilidad por los estudiantes de los referentes y procesos comparativos.

Referencias bibliográficas.

- **Bourdon, M.** (1848). *Aritmética*. Tomo I. Madrid. Imp. de D. J. M. Alonso. 1ª ed: 1797.
- **Bruño** (1939). *Tratado Teórico-Práct. de Arit. Raz.* 2ª Ed. Zaragoza. Ed. Gambón.1932.
- **Dalmáu, C.** (1937). *Lecciones de Aritmética* 97.ª. Ed. Gerona-Madrid. Ed. Dalmáu C.
- **Dalmáu C.** (1944?). *Aritmética razonada y Nociones de álgebra* . Ed. Dalmáu C. 1898
- **Lacroix, S.** (1826). *Tratado elemental de Aritmética*. T. I. 3ª ed. Madrid: Imp. Real. 1797
- **Pérez de Moya, J.** (1573). *Tratado de Mathematica*.... Alcalá de Henares. Juan Gracian.
- **Puig, P.** (1956). *Didáctica matemática Eurística.* Madrid: I. de F. del P. de E.
- **Vallejo, J.** (1841). *Tratado Elemental de Mats.* .4ª ed. Madrid. Imp Garrayasaza. 1813.

Concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos: estado de conocimientos en México

Alejandra Avalos Rogel
Escuela Normal Superior de México

Este trabajo da cuenta de una revisión analítica de investigaciones llevadas a cabo en México sobre concepciones de maestros de educación básica referentes a contenidos geométricos. Dicho análisis permitió apoyar el desarrollo de la investigación *Estudio de las transformaciones que sufren las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos en un curso de actualización.*

En el estado de conocimiento de las investigaciones en educación matemática en México realizadas de 1982 a 1992, (Waldegg 1995), se afirma que existen aún pocos estudios sobre conocimientos, concepciones y prácticas del maestro. De éstos, los consagrados a las concepciones de los maestros sobre el conocimiento geométrico son los menos.

Es por eso que en esta revisión también se consideraron estudios diversos que han documentado algunas prácticas cotidianas de los maestros en clases de geometría. El análisis de dichas referencias permitió indagar representaciones sobre la geometría, su enseñanza y su aprendizaje y la manera como se organizan.

Categoría de análisis:

Para la revisión, se requirió delimitar el significado del término "concepción", con el fin de que fuera referente y sirviera a la vez como categoría analítica.

Moreno y Waldegg (1992) definen "concepción" como "un complejo cognoscitivo" constituido por "una red de información, de imágenes, de relaciones, anticipaciones e inferencias alrededor de una idea". En este trabajo se considera que ese "complejo cognoscitivo" está formado por varias redes que se construyen históricamente, y que se relacionan unas con otras en algunos de sus nodos.

En particular, las concepciones de los maestros sobre contenidos matemáticos son entramados derivados de la organización de aprendizajes adquiridos en su escolaridad, su formación profesional y por un referente curricular (v. gr. los contenidos de los diversos curricula desarrollados, o la información y presentación de los contenidos en los libros de texto).

A pesar de que las concepciones así definidas entran en el terreno de la *metacognición*, y por lo tanto de lo no observable, algunos investigadores consideran que las concepciones sobre los contenidos y su enseñanza determinan las conductas de los maestros dentro del aula (Thompson 1984, 1992; Dougherty *et al.* 1990). Otros consideran que es posible identificar concepciones de manera directa, en la expresión de opiniones sobre los contenidos y la manera de enseñarlos, y de manera indirecta, mediante el análisis de las decisiones didácticas (Robert y Robinet 1989).

Las pocas investigaciones en México sobre concepciones relacionadas con contenidos geométricos (Nemirovsky 1990; Méndez 1991a, 1991b; Quintil

1991; Fuenlabrada 1988, 1994; Avalos y Méndez 1995) han recurrido a aproximaciones de tipo cualitativo: se pide al maestro, en entrevistas semi-estructuradas, que exprese sus ideas sobre la relevancia del contenido geométrico y la forma de abordarlo, para contrastarlas, en un segundo momento, con la manera como lo trabaja con sus alumnos en el salón de clase.

De esto se desprende que la concepción de los maestros sobre la naturaleza de los contenidos escolares no está desligada de las concepciones sobre su enseñanza y su aprendizaje; más aún, todas ellas están entretejidas en redes, de tal suerte que hablar de concepción sobre contenidos de manera aislada carece de sentido.

Por ello el análisis consistió en primer término, en la identificación de nodos que relacionan las ideas sobre un determinado contenido, con las representaciones que se referían a su enseñanza y su aprendizaje, en los dos tipos de documentos seleccionados; en segundo lugar, en el reconocimiento de una lógica subyacente mediante la cual se organizaban dichos nodos, y finalmente en la determinación de factores que favorecieron esas tramas.

Metodología:

El trabajo es una investigación de carácter documental, en la que se seleccionaron, analizaron y sistematizaron materiales publicados en revistas nacionales especializadas, reportes de investigaciones y tesis de posgrado realizadas en México, sobre concepciones relativas a contenidos geométricos y aquellos que se referían a las prácticas de los maestros en cursos de geometría en el nivel básico.

Cabe señalar que no todas las investigaciones específicas de concepciones sobre conocimientos geométricos abordan el tema bajo la idea de que las concepciones sobre contenidos están íntimamente ligadas a las de su enseñanza y su aprendizaje. De ahí que muchos de estos resultados, referidos básicamente a ideas de los maestros sobre la geometría, tuvieron que ser complementados por análisis de clases reportados en los mismos trabajos, o en otras investigaciones, en las que se presentaba a los maestros asumiendo esa misma idea y tomando decisiones de tipo didáctico. El análisis de estas decisiones -que consistían por ejemplo, en organizar cierto tipo de actividades, o presentar algún material didáctico- daban la pauta para establecer el tipo de concepción de enseñanza o de aprendizaje que estaba poniendo en juego el maestro y su conexión con una cierta representación del objeto geométrico.

Resultados:

Se exponen entramados de concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos, su relación con concepciones de enseñanza y aprendizaje, y la lógica subyacente en ellos.

Primer entramado

Concepción de contenido: la geometría es un conjunto de figuras que los niños aprenden mediante la percepción	
Concepción de enseñanza: El maestro sólo tiene que mostrar la figura geométrica al niño y repetir su nombre.	Concepción de aprendizaje: El aprendizaje de la figura tiene lugar • en la percepción, y la identificación de la figura en el entorno, • en la repetición y memorización de su nombre.

El objeto geométrico se encuentra fuera del sujeto; para aprehenderlo, es suficiente con verlo, reconocerlo en el entorno, memorizar su nombre, y a veces algunas de sus características. La *enseñanza* de la geometría está centrada en la "ostensión" de la figura por parte del maestro, y en el uso de analogías, -el paralelismo con las vías del tren-, y en un *aprendizaje* de la figura basado en la percepción. Para muchos maestros, el reconocimiento de la figura por parte del niño, y su correcta denominación, es una evidencia de desarrollo intelectual (Nemirovsky 1990).

De acuerdo a Gálvez (1985), esta concepción está basada en lo que Piaget (1964) considera uno de los problemas básicos del conocimiento geométrico: la creencia de que existe una homogeneidad relativa entre el significante y el significado. Una consecuencia de la enseñanza basada en la percepción, es la concepción de que en la determinación de las características de las figuras cabe incluir rasgos de las condiciones en que son presentados; para el caso de las figuras su posición relativa con respecto a los bordes de la hoja (MÉNDEZ 1991a). Una segunda consecuencia es la tendencia a asociar la *existencia* del nombre de una figura con la percepción de alguna "regularidad" en ella.

Segundo entramado

Concepción de contenido: la geometría es un conjunto de configuraciones que se trazan	
Concepción de enseñanza: El maestro sólo tiene que proponer actividades de trazo o reproducción de configuraciones, y la secuencia más "sencilla".	Concepción de aprendizaje: El aprendizaje tiene lugar • En la acción misma del trazo, • En la repetición y memorización de la secuencia

Los maestros consideran que las figuras quedan determinadas por su trazo. La *enseñanza* de la geometría está centrada en el diseño por parte del maestro, de la "secuencia más sencilla" o "más vistosa" para el trazo de alguna figura geométrica, y en una idea del *aprendizaje* de la figura mediante la memorización de una secuencia propuesta.

Al parecer a esta idea subyace una metodología sensual-activista de la enseñanza de las matemáticas, difundida en México desde mediados de la década de los 60, hasta mediados de los 80, en la que se presume que el niño aprende mediante su actividad física y su interacción con los objetos (Gálvez 1985). Los maestros subrayan la importancia del manejo "correcto" del juego de geometría, de tal suerte que llegan a considerarlo como un contenido en sí mismo que tiene que ser enseñado de manera independiente de los contenidos geométricos, aunque no se sepa cómo Méndez (1991a, 21).

Tercer entramado

CONCEPCIÓN DE CONTENIDO: LAS CARACTERÍSTICAS DE LAS FIGURAS SE DERIVAN DE LA MEDICIÓN (ARITMETIZACIÓN DE LAS [illegible])	
CONCEPCIÓN DE ENSEÑANZA: EL MAESTRO ASIGNA VALORES A ELEMENTOS LINEALES DE FIGURAS (Y PROPONE ACTIVIDADES DE OBTENCIÓN DE PERÍMETROS O ÁREAS).	CONCEPCIÓN DE APRENDIZAJE: EL APRENDIZAJE TIENE LUGAR • POR LA SUPUESTA FAMILIARIDAD CON LOS NÚMEROS, • EN LA ACCIÓN DE SUSTITUIR, EFECTUAR OPERACIONES, E INTERPRETAR EL RESULTADO

Los objetos geométricos se determinan únicamente en función **de sus** dimensiones por sobre sus propiedades geométricas. El **profesor** proporciona a los niños datos numéricos que generalmente correspon**den al** tamaño de elementos geométricos lineales, como por ejemplo, una base y una altura en el caso de los triángulos, y después les pide que realicen los cálculos numéricos correspondientes a la fórmula previamente memorizada. En este tipo de situaciones, la actividad del alumno consiste en sustituir los valores y realizar las operaciones, utilizando una lógica relacionada con las propiedades de la igualdad y con el orden en la realización de operaciones, dejando de lado el análisis geométrico (Ávila 1991) e incluso el concepto de medida. La figura en este tipo de situaciones sirve únicamente como ilustración en la solución de los problemas planteados.

Referencias Bibliográficas:

- **Avalos, A y Méndez, B.** (1995). "La formación de profesores y la enseñanza de la geometría". En *Memorias del V Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Wenzelburger*, México: UACPyP - Grupo Editorial Iberoamérica.
- **Avila, A.** (1991) "Matemáticas, enseñanza y formación de profesores". *Pedagogía 7 (21)*. México: UPN.
- **Dougherty, B.** (1990). "Teacher conceptions about problem solving and problem solving instruction". En *Proceedings of the 14th PME Conference (I)*. México: CONACYT- CINVESTAV.
- **Fuenlabrada, I. y Nemirovsky, M.** (coord.) (1988). *Formación de maestros e innovación didáctica*. México: D.I.E.
- **Fuenlabrada, I.** (1994). "La geometría en la escuela primaria". Programa de actualización del magisterio. *Serie: el conocimiento en el aula.* (Audiocinta) Matemáticas 8. México: S.E.P.

Modelación matemática en química: una experimentación con alumnos de secundaria.

Araceli Fuentes Figueroa y Simón Mochón Cohen
Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN (México)

La modelación matemática aplicada a materias científicas como la física, química, biología y geografía como un enfoque de enseñanza; ha sido investigada en países como Inglaterra, Francia, España y recientemente en México. Es una forma de establecer vínculos entre las matemáticas y estas materias afines. Es la definición de modelo matemático de S. Mochón (1996), que da pauta a la presente investigación.

En este artículo se describirá una experimentación en el salón de clase con alumnos de secundaria, que consistió en trabajar con algunos modelos matemáticos sobre reacciones químicas. El acercamiento fue totalmente numérico.

Antecedentes:

- Proyecto anglo/mexicano: On The Role of Spreadsheets within School-based Mathematical Practice. Ver por ejemplo Rojano, T y Sutherland, R. (1995); así como Sutherland, R. y Rojano, T. (1993). Este proyecto plantea el uso de dos recursos: la modelación y la computadora para relacionar el conocimiento científico con el matemático. Se realizó con alumnos de preparatoria en ambos países.
- Mochón, S. y Rojano, T. (1996). Modelación matemática a nivel Secundaria: el puente entre las matemáticas y las ciencias. Este proyecto integra el conocimiento matemático del alumno en dos dominios: el matemático y el científico. Introduciendo ideas de modelación matemática para explicar los conceptos fundamentales de las materias científicas y para la exploración y cuantificación de sus fenómenos. La presente investigación forma parte de este proyecto.

Planteamiento del problema:

El alumno construye su conocimiento de acuerdo al tipo de problemas que enfrenta. Debido a esto, este conocimiento funciona en situaciones para las cuales ha sido construido. Las dificultades que el alumno manifiesta en el aprendizaje de las matemáticas están relacionadas con el lenguaje que se utiliza, la simbología y el nivel de abstracción que se requiere,... En México su enseñanza no está relacionada con contextos de la vida cotidiana ni con otras materias. Según Rojano et. al. (1996), una forma de establecer vínculos entre las matemáticas y las materias científicas, es por medio de la modelación matemática. Entonces:

¿será la modelación matemática un recurso adecuado para la enseñanza de conceptos matemáticos relacionados con la química, en la escuela secundaria?

Objetivos:

Los propósitos de la experimentación, son entre otros:

- Que el alumno establezca la relación entre las matemáticas y la química por medio de la modelación matemática.
- Que se apropie de conceptos matemáticos y químicos.

Marco teórico:

Será la teoría de Lave (1993) sobre la cognición en práctica y la psicología de exteriores cuyo enfoque estudia la continuidad y la discontinuidad de la práctica matemática en materias científicas, el sustento para analizar los datos obtenidos en la presente investigación. De igual manera, se retomará la teoría de Vigotsky sobre la interacción social cuya perspectiva es ver al alumno como parte de un grupo, en el trabajo con compañeros.

Referentes conceptuales:

Se han retomado los modelos químicos: reacción química unidireccional y reacción química reversible, propuestos por Mochón y Rojano (1996) diseñados para profesores de secundaria adaptándolos al nivel de los estudiantes.

Según Mochón, S. (1996), "un modelo matemático es la representación de un fenómeno real, basada en relaciones matemáticas". El modelo exponencial para el crecimiento de las poblaciones, también es útil en las reacciones químicas elementales. Este modelo puede ser construido con un enfoque numérico que requiere de la matemática llamada discreta. La utilidad de los modelos matemáticos es predecir lo que sucedería en una situación real en condiciones normales y ayudar a entender mejor los fenómenos que describen desarrollando nuestra intuición sobre su funcionamiento.

Una reacción química es un fenómeno cuya característica principal es la transformación de moléculas de un determinado tipo en moléculas de otro. El mecanismo de transformación puede ser el intercambio, transposición o transferencia recíproca o no de partículas entre las llamadas sustancias reactivas. Las reacciones están condicionadas a la segunda ley de la termodinámica y diversos factores como la presión, la temperatura, la concentración...., pueden modificarlas. Para estudiar estas transformaciones de manera cuantitativa, se emplearán los modelos mencionados basados en el intercambio de partículas.

Metodología:

La experimentación consistió en aplicar a un grupo de alumnos, un pre-test sobre sus habilidades matemáticas, gráficas y numéricas relacionadas con los modelos químicos. En base a los resultados obtenidos, se seleccionaron seis alumnos para la experimentación, aplicándoles tres hojas de trabajo en donde se combinó la enseñanza y la práctica. Las hojas de trabajo están divididas en dos partes, la hoja 1 dedicada a las habilidades matemáticas y las hojas 2 y 3 a los modelos químicos. Los problemas planteados, tienen un acercamiento de abajo hacia arriba, es decir, de situaciones particulares a situaciones generales. Se trabajó 8 sesiones, dedicando las dos primeras al aspecto matemático y las restantes a los modelos químicos. Al término se aplicó un post-test con reactivos similares al pre-test con el propósito de saber si los modelos matemáticos propuestos son de utilidad para establecer la relación entre las matemáticas y la química.

Se trata de un estudio experimental con un análisis cualitativo a partir de los datos obtenidos con los instrumentos y los recursos de videograbación y registro de observaciones. Se desarrolla en las siguientes etapas:

1. Elaboración de los instrumentos: pre-test, tres hojas de trabajo y post-test.
2. Aplicación del pre-test para seleccionar a los seis alumnos.
3. Aplicación de las hojas de trabajo, combinada con enseñanza.
4. Aplicación del post-test.

Resultados preliminares:

Se aplicaron las dos primeras hojas de trabajo. La tercera hoja, que corresponde al segundo modelo de reacciones químicas, se aplicará en fecha próxima.

En la resolución de la primera hoja de trabajo sobre habilidades matemáticas necesarias para la aplicación de los modelos químicos, los alumnos manifestaron una fuerte predilección por el uso de la regla de tres, al calcular porcentajes. Otro aspecto que llamó la atención, fue su creencia de que siempre se obtienen resultados decimales cuando se calculan porcentajes menores al 10%. Al resolver los problemas de variaciones recurrentes, en donde los resultados están estrechamente ligados a resultados anteriores y posteriores, la estrategia empleada fue errónea porque no consideraron esta relación entre los datos. Lo que sí quedó muy claro es el hecho de que reconocen que una variación constante gráficamente es una línea recta, lo que les permitió distinguir que la gráfica de una variación no constante no es una línea recta.

En la segunda hoja de trabajo, realizaron el llenado de tablas de manera concreta, sin observar la agrupación y relación entre columnas, algo similar a su resolución de problemas de variación recurrente. Un aspecto importante en la aplicación de los modelos químicos es que reconocen que los números decimales aparecen en el modelo y que no tiene relación con la realidad del fenómeno. Es decir, reconocen las diferencias entre el modelo y el fenómeno real. Observan que las gráficas de botes con pelota y botes sin pelota, son recíprocas. Cuando la primera gráfica disminuye, la segunda aumenta.

Durante la aplicación de las hojas de trabajo, hubo intervenciones de enseñanza cuando la situación así lo ameritaba, en ocasiones para aclarar los problemas planteados, otras para hacerlos reflexionar sobre sus concepciones erróneas,....

También durante el desarrollo de las dos hojas de trabajo, se manifestó de manera constante la ayuda de un compañero (el experto según la teoría de

Vigotsky) hacia otros compañeros, cuando estos no lograban comprender lo que se les preguntaba. Dicha intervención también se manifestó cuando se analizaron los resultados que cada alumno obtuvo y establecer un consenso de grupo.

Respecto a la aplicación del pre-test y del post-test; en el primero hubo dificultades para calcular porcentajes, resolver los problemas de variaciones recurrentes y en el trazo de las gráficas. Tampoco contestaron todas las preguntas que se les hicieron en cada problema.

El post-test reflejó un disminución considerable en las dificultades manifestadas en el pre-test.

Referencias Bibliográficas:

- **Lave, J.** (1988). Cognition in Practice: Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life. Cambridge University Press, Cambridge England.
- **Mochón, S. y Rojano, T.** (1996). *La modelación en el nivel secundaria: el puente entre las matemáticas y las ciencias.* CINVESTAV SEP, México.
- **Rojano, T. y Sutherland, R.** (1995). *Modelación y resolución de problemas de matemáticas. Un uso de las hojas electrónicas de cálculo. Fase: estudio con niños de 14-15 años de edad con reticencia al álgebra.* Proyecto conjunto Cinvestav/Universidad de Londres. Financiado por CONACYT/Consejo Británico/PNFAPM. Expediente No. 1390-S9206. Reporte técnico 1994-1995.
- **Sutherland, R. y Rojano, T.** (1993). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra Problems. *The Journal of Mathematical Behavior,* New Jersey, USA, Vol. 12, 4 pág. 353.
- **Vigotsky, L.** (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes.* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

Aprendizaje y formalización en matemáticas

Uldarico Malaspina J
Pontificia Universidad Católica del Perú

Evidentemente, la formalización es muy importante en matemáticas, pues contribuye de manera eficiente a resolver problemas, a sugerir generalizaciones, a seguir haciendo matemática y a construir modelos y aplicaciones en diversos campos. Los aportes de los griegos, la física y la teoría económica nos brindan valiosos ejemplos de la contribución de la formalización al avance de la matemática y de la ciencia en general. Sin embargo, el aporte de la formalización sería muy reducido o nulo si quien la emplea no tiene un manejo intuitivo de los conceptos y un conocimiento claro de lo que los símbolos están expresando; y esto es esencial tenerlo en cuenta en las tareas de enseñanza y aprendizaje de la matemática a todo nivel, pues es muy frecuente reducirlas a la parte formal, quizás por concebirse -equivocadamente- que enseñar o aprender matemáticas es equivalente a manejar símbolos, algoritmos y demostraciones.

En particular, debemos reflexionar sobre las demostraciones matemáticas desde el punto de vista de su función educativa y cuidar que la formalización se dé en una fase que siga a un acercamiento intuitivo y en lo posible experimental de la matemática. Este cuidado debe ser mayor cuanto menor sea la edad del educando, pero no por ello dejado de lado cuando se trabaja con universitarios o en capacitación docente.

Pasemos entonces a ubicarnos en un marco más amplio, respondiendo a algunas interrogantes:

1. ¿Cómo se aprende matemáticas?

Ciertamente hay respuestas muy naturales o espontáneas, como "estudiando", "asistiendo a clases", "haciendo ejercicios" y otras similares, pero debemos prestar atención especial a respuestas como *"resolviendo problemas"*, *"experimentando"*,, *"haciendo preguntas"*, *"relacionando conceptos"*, *"intercambiando ideas"*, *"inventando problemas"*, *"descubriendo regularidades"*, *"aplicando conocimientos"*, *"entendiendo y haciendo demostraciones"*, *"dando ejemplos y contraejemplos"* y *"observando cómo trabaja en su taller un matemático"*. Notemos que estas actividades no necesariamente requieren de un manejo formal riguroso de los conceptos matemáticos; menos aún en niveles básicos y en particular en las actividades relacionadas con problemas, pues lo esencial es trabajar con "verdaderos" problemas que desafíen la curiosidad intelectual y permitan desarrollar la creatividad, la intuición y niveles básicos de manejo de símbolos. Tengamos en cuenta, por ejemplo, que la fundamentación lógica y formal del sistema de números reales no se hizo hasta finales del siglo XIX; sin embargo ya en el siglo XVII había surgido el cálculo infinitesimal, resolviendo problemas de áreas y volúmenes en base a la observación, la creatividad y el manejo intuitivo de las ideas de número real, variable, función y límite.

Cabe aclarar que no estamos sosteniendo que sea malo formalizar, sino llamando la atención sobre el peligro de abusar, en la tarea educativa, del tratamiento formal de conceptos, sin una base experimental e intuitiva, que es fundamental en el aprendizaje de las matemáticas. Al respecto, David Wheeler nos dice: "Es una tentación, especialmente cuando hablamos de pedagogía y didáctica, estar tan en contra de la formalización en matemáticas, que no admitimos que tenga virtudes. Y es importante tener presente que la formalización tiene virtudes, sin que esto signifique que la formalización siempre sale triunfante".

Por ejemplo, si para comparar dos fracciones damos directamente -o muy pronto- el criterio formal de comparar los productos del numerador de una por el denominador de la otra ($a/b < c/d$ si y sólo si $ad < bc$) y luego muchos ejercicios para que los alumnos practiquen esta regla, estaremos perdiendo valiosas ocasiones para que los estudiantes resuelvan experimentalmente problemas prácticos, sencillos y cotidianos que conlleven la comparación de fracciones. Con problemas sencillos y graduados y la orientación paciente y adecuada del profesor, se logra que los alumnos comprendan más el concepto de fracción, identifiquen bien el significado del denominador, vinculen las fracciones homogéneas y heterogéneas y descubran o construyan su propia regla práctica para comparar fracciones. Con estos logros habremos contribuido a que el niño aprenda matemática, que -evidentemente- es mucho más que manejar una regla dada.

Los conceptos de límite y continuidad de funciones y sus definiciones formales en términos de los "famosos" ε y δ son también ejemplos importantes en los que el apresuramiento en la presentación formal no ayuda a su comprensión intuitiva, tan necesaria para la comprensión de otros conceptos del análisis matemático. Debemos tener en cuenta que llegar a esta presentación tomó mucho tiempo y esfuerzo y fue hecha por Weierstrass recién a mediados del siglo XIX, con las contribuciones de Bolzano, Cauchy, Abel y Dirichlet, y después de que el cálculo infinitesimal, desde el siglo XVII, se estuvo desarrollando y aportando a la matemática misma y a la física, sin tener el nivel de formalismo de ahora.

2. ¿Cuál es el papel del docente en el aprendizaje de las matemáticas?

Teniendo en cuenta las respuestas a la pregunta anterior, es claro que el docente debe promover, estimular y orientar las actividades de aprendizaje de sus alumnos, con base, fundamentalmente, en la experimentación, la observación, el descubrimiento, la conjetura y la resolución de problemas. Pero es importante destacar que la eficiencia de este papel del docente será mayor si lo desempeña

- *contagiando entusiasmo, agrado y espíritu científico*
- *reconociendo y valorando los conocimientos previos del alumno*

En este marco global, el maestro debe buscar formas de identificar las motivaciones de sus alumnos, plantearles desafíos, inducirlos a inventar ejemplos, contraejemplos, problemas y conceptos, fomentar una aproximación intuitiva y una comprensión global de los conceptos y proposiciones fundamentales, relacionar intuición y rigor, dar visión histórica del tema que trate, fomentar el trabajo en grupos, evaluar adecuadamente y trabajar con los conceptos teniendo en cuenta que hay etapas de comprensión y que ésta es tanto un objetivo como un proceso.

Si el profesor tiene dominio de los temas que trabaja y tiene el hábito de experimentar con ellos (inventando problemas, haciendo interpretaciones geométricas, inventando juegos, etc.), sin caer en complicaciones innecesarias, podrá cumplir mejor el papel que estamos describiendo, pues tendrá y transmitirá seguridad a sus alumnos al orientar sus iniciativas, y en cada caso podrá decidir mejor cuándo y cómo emplear la formalización, sin "quemar etapas". Es pertinente recordar, sobre todo pensando en enseñanza a niños, lo que nos dice Piaget: "cuando los adultos tratan de imponer prematuramente a un chico los conceptos matemáticos, su aprendizaje es meramente verbal; la verdadera comprensión de los mismos sólo llega con su crecimiento mental"; y en general, lo que nos dice Skemp: "Las aproximaciones usuales en la enseñanza de las matemáticas en el pregrado tienden a dar a los estudiantes el *producto del pensamiento matemático*, en lugar del *proceso del pensamiento matemático*". Tener en cuenta esto es particularmente importante en niveles medios y superiores, pues en ellos hay una mayor tendencia a presentar los temas a los estudiantes de manera formal y enfatizando la lógica, lo cual puede dificultar la comprensión del estudiante. David Tall nos dice "una presentación lógica puede no ser apropiada para el desarrollo cognitivo del que aprende. Lo que es esencial - para los estudiantes - es una aproximación al conocimiento matemático que crezca como ellos crecen: una aproximación cognitiva que tenga en cuenta el desarrollo de su estructura de conocimientos y sus procesos de pensamiento".

3. ¿Cuán importantes son las demostraciones formales en el aprendizaje de las matemáticas?

Evidentemente las demostraciones formales son esenciales en la matemática. Tanto, que insensiblemente se va trasladando ese mismo grado de importancia al campo de su enseñanza y aprendizaje, en los diversos niveles y sobre todo en el superior. Sin embargo, hay que saber distinguir estos campos, pues, como dice Miguel de Guzmán, es tal la influencia del formalismo, que "el estudiante que pide una *demostración matemática* posiblemente tiene en su cabeza el prejuicio, transmitido por muchos de sus profesores, de que sólo lo que resulta tras unos cuantos cuantificadores lógicos merece la denominación de demostración matemática". Este prejuicio no ayuda a valorar en su verdadera dimensión el uso de recursos gráficos y de la *visualización* en general para presentar demostraciones, perdiéndose entonces interpretaciones geométricas, ideas intuitivas y ayudas importantes para retener teoremas, imaginar nuevas relaciones, conjeturar otros resultados e inventar y resolver problemas. La función educativa de las demostraciones va más allá de la verificación de la corrección de cada paso en las deducciones formales (se podría examinar cada "árbol" y no tener idea clara del "bosque"). La demostración de un teorema comprende no sólo aspectos mecánicos sino también intuitivos, y es más valorada por el que aprende cuando se hace luego de haber entendido bien el teorema, de haberlo aplicado en la solución de un problema y de haber discutido sobre sus bondades y sus limitaciones.

Ciertamente, en la tarea educativa, no siempre es necesario demostrar formalmente los teoremas que se emplean, ya sea porque lleva a detalles y consideraciones que desvían de las ideas globales que se van desarrollando, porque se requiere de mayores conocimientos o de mayor madurez para entenderlas o porque es suficiente mostrar argumentos visuales convincentes. En "El Rincón de la Pizarra" Miguel de Guzmán nos presenta significativas reflexiones sobre la visualización y valiosos ejemplos del uso de ella en el análisis matemático. Una joya histórica que muestra el valor de la visualización es indudablemente la demostración del teorema de Pitágoras descomponiendo de dos maneras un cuadrado de lado $a + b$, siendo a y b las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo.

Para terminar, unas líneas de Gila Hanna, que resumen bastante de lo dicho: "El punto de partida para la comprensión es la idea matemática intuitiva, basada en la experiencia cotidiana. Para avanzar, estas ideas intuitivas deben ser desarrolladas y hechas explícitas. Esto requiere un grado de formalismo"... "Pero esto tiene su precio: el estudiante, distanciado del contexto intuitivo original, puede perder visión de la realidad y convertirse en un activador de símbolos".

Resumen descriptivo del curso:

El curso se desarrolló de manera muy participativa, intercambiando opiniones sobre el papel de la formalización en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y mostrando ejemplos de la importancia de usarla adecuadamente, interactuando con las aproximaciones intuitivas, tanto para el desarrollo de conceptos como para la resolución de problemas y para la demostración de teoremas. En esta perspectiva se trabajaron problemas de cuadrados mágicos; problemas que se pidió inventaran los participantes en base a las experiencias tenidas en el paseo turístico y algunos otros problemas. En particular se trabajó detenidamente el problema de *determinar dos números cuya suma sea 15 y su producto máximo.* Fue resuelto cosiderándolo desde un problema de cálculo mental para niños de primaria, hasta un problema de optimización restringida por una igualdad. Se hicieron interpretaciones geométricas, replanteamientos y generalizaciones del problema, yendo desde una solución empírica de un problema de rectángulos isoperimétricos hasta la solución mediante multiplicadores de Lagrange del problema de un consumidor buscando maximizar su utilidad con una restricción de presupuesto. Trabajar este problema permitió ver de manera muy clara la importancia de hacer interactuar la intuición, la conjetura, la visualización y la formalización. Finalmente se ilustró con ejemplos la importancia de la visualización en el papel educativo de las demostraciones matemáticas.

Referencias Bibliográficas:

- **Guzmán, M. de** (1990). *El rincón de la pizarra*. Pirámide.
- **Hanna y Winchester.** (1990). *Creativity, Thought and Mathematical Proof.* Interchange
- **Skemp, R.** (1971). *The psichology of learning mathematics*. Penguin.
- **Tall, D.** (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer.

Contra la corriente.

Luis Ortiz Franco
Chapman University, USA

Introducción:

La población de los Estados Unidos de Norteamérica (USA) consiste de grupos socioculturales que representan a todos los continentes del mundo. Uno de esos grupos es de ascendencia latinoamericana. Este grupo se constituye de personas de origen mexicano, puertorriqueño, guatemalteco, peruano, chileno, argentino, cubano, dominicano, en fin, de todos los países latinoamericanos. Las fuentes oficiales estadounidenses identifican a este grupo como hispanos, pero los miembros del grupo se autoidentifican como latinos. En este ensayo se discuten aspectos de ingresos y matemática educativa tocante a latinos en USA.

Investigaciones empíricas sobre la relación entre los ingresos familiares y el nivel de aprovechamiento en matemáticas de alumnos anglosajones estadounidenses del kinder a la preparatoria, indican que hay una correlación positiva entre estos dos factores. White (1982) examinó más de cien estudios y observó que existía una correlación de .20 entre el nivel de aprovechamiento en matemáticas y el índice socioeconómico familiar cuando el alumno era la unidad de análisis dicha correlación aumentaba a .70, cuando se tomó el aula de clase como la unidad de análisis. Secada (1992) condujo una reseña de la literatura sobre el aprovechamiento de matemáticas de varios grupos raciales, étnicos, clases sociales y lenguaje, concluyó que se espera encontrar un incremento en el nivel de aprovechamiento en matemáticas basado en incrementos de nivel socioeconómico familiar. Otros investigadores han llegado a investigaciones similares.

Por ejemplo, Mullis, Dossey, Owen y Phillips (1993) observaron que muchas investigaciones sobre las diferencias en los niveles de aprovechamiento, en matemáticas, entre alumnos estadounidenses afroamericanos, anglosajones, asiáticos, indígenas norteamericanos y latinos han reportado que dichas diferencias están relacionadas al nivel socioeconómico de estos grupos. Además, Zaslavsky (1994) reportó que estudiantes de más alto nivel económico familiar obtuvieron índices más altos en la porción de matemáticas del examen de capacidad académica (SAT) que aquellos estudiantes de más bajo nivel económico familiar.

La trayectoria trazada por los estudios ya citados, forman la base en la cual la mayoría de los pedagogos basan sus expectativas sobre la relación entre ingresos familiares y nivel de aprovechamiento en matemáticas. No obstante, hay inconsistencias en los resultados de indagaciones empíricas que han investigado este tema con grupos de estudiantes de origen latino en USA. Por ejemplo, Anderson(1969) investigó la relación entre el nivel económico familiar y el nivel de aprovechamiento en Matemáticas en estudiantes chicanos (una persona de origen mexicano) en El Paso, Texas y reportó haber encontrado una correlación positiva entre estos dos factores. Begle

(1979) reportó que había pequeña evidencia, indicando que el nivel de aprovechamiento en Matemáticas de estudiantes chicanos mejor a medida que su índice de asimilación, léase acercamiento a nivel mediano, económico, a la cultura de nivel mediano aumenta. Pero, Buriel y Cardoza (1988) reportaron que el nivel socioeconómico está completamente desligado al nivel de aprovechamiento en matemáticas para los alumnos chicanos.

Con dichos antecedentes, en este ensayo se analizan datos sobre ingresos familiares y niveles de aprovechamiento en matemáticas, de estudiantes de origen latino en USA abarcando un período de dos décadas Los datos sobre ingresos familiares provienen de los censos oficiales estadounidenses de 1972 y de 1992, mientras que los datos del nivel de aprovechamiento en las matemáticas, son tomadas de reportes del Centro Nacional de estadísticas educativas (NCES) correspondientes a 1973 y a 1992. Los datos son los siguientes.

Ingresos familiares:

Tienda (1995) examinó datos del U.S.Census correspondientes a la distribución de ingresos en los Estados Unidos de 1972 a 1992 y reportó lo siguiente. El ingreso familiar promedio en 1972 para familias no latinas fue de $36,952, mientras que el de las familias latinas fue 30 % menos de esa cantidad, 25,858. En 1992 las figuras correspondientes fueron 40,421 para las familias no latinas y 23,901 para familias latinas. Una diferencia de 41%. Se concluye que en estas dos décadas los ingresos familiares de los latinos no únicamente disminuyeron en términos absolutos sino que también se alejaron de nivel económico promedio.

Además, el nivel de pobreza entre los estudiantes latinos menores de 18 años, de Kinder a Bachillerato, también registró un aumento durante el mismo periodo de tiempo. Las cifras son las siguientes: un 28.8 por ciento de esta población vivía en la pobreza en 1972, mientras que en 1992 el 39.9 por ciento vivía en esas condiciones. El grupo anglosajón correspondiente, registro los siguientes datos: en 1972 el 11.1 por ciento vivió en la pobreza, mientras que el 16.9 por ciento vivió en esas condiciones en 1992.

Por lo tanto, se puede concluir que hay más probabilidades que la juventud latina viva en la pobreza que la juventud anglosajona. Además, recordando las conclusiones y expectativas de investigadores educativos arriba mencionados y basado en los datos económicos anteriores, se puede concluir que el nivel de aprovechamiento en matemáticas de estudiantes latinos disminuyó comparado al de estudiantes anglosajones durante esas dos décadas. La información de acuerdo al NCES (1995) es la siguiente.

Nivel de aprovechamiento en matemáticas:

El nivel promedio de aprovechamiento en matemáticas de estudiantes anglosajones de 9 años de edad en 1973 fue de 225 mientras que el promedio de los estudiantes latinos fue de 202, una diferencia de 23 puntos.

En 1992, los promedios correspondientes fuero de 235 para los anglosajones y 212 para los latinos, aún 23 puntos de diferencia.

Para los estudiantes de 13 años de edad, en 1973 los anglosajones obtuvieron un promedio de 274 y el promedio de los estudiantes latinos fue de 239, una diferencia de 35 puntos. En 1992, la diferencia disminuyó a 20 puntos , los promedios correspondientes fueron 279 para los anglosajones y 259 para los estudiantes latinos.

Por último, en 1973 los estudiantes anglosajones de 17 años de edad, obtuvieron un promedio de 310 mientras que el promedio de los estudiantes latinos de la misma edad fue 227, una diferencia de 33 puntos. En 1992, los estudiantes anglosajones registraron un promedio de 312 mientras que los estudiantes latinos lograron un promedio de 292, la diferencia decreció a 20 puntos.

Conclusión:

El resultado de este análisis indica que durante el periodo 1972-1992 el nivel de aprovechamiento en matemáticas, de los alumnos latinos, aumento, mientras que su nivel de ingresos familiares disminuyó. Además se observó que la diferencia en el nivel de aprovechamiento en matemáticas entre estudiantes latinos y anglosajones disminuyó, o permaneció constante, mientras que las desigualdades económicas entre ambos grupos se agudizaron. Estos resultados son contradictorios a las expectativas de investigadores y pedagogos en matemática educativa, e indican que es muy posible que el aprendizaje y el nivel de aprovechamiento en matemáticas, de estudiantes latinos, obedecen normas socio-cognoscitivas diferentes a aquellas de los estudiantes anglosajones. Esto implica la posible necesidad de desarrollar un marco teórico para investigar el aprendizaje de la matemática entre los estudiantes latinos diferentes a aquellos marcos teóricos que se utilizan para investigar temas similares en estudiantes anglosajones.

Referencias Bibliográficas:

- **Anderson, J.** (1969). *Factors affecting achievemnet of mexican-americans in a metropolitan context.* Final Report, Mathematics Education Program, Southwest DevelopmentLaboratory, Las Cruces , New Mexico: New Mexico State University.
- **Begle, E.G.**, (1979). *Critical variables in mathematics education: finding from a survey of the empirical literature.* Washington, D.C.; MAA and NCTM.
- **Buriel, R.; Cardoza, D.**,(1988). Sociocultural correlates of achievement among three generations of Mexican American high school seniors. *American Educational Research Journal*, Vol.25, pp. 177-192.
- **Mullis, I.; Dossey, J.; Owen,E.; Phillips, G.**, (1993). *NAEP 1992: mathematics report card for the nation and for the states.* Washington, D.C.: National Center for EducationalStatistics, U.S. Departament of Education.
- **National Center for EducationalStatistics**, (1995). *Thy conditions of education 1995.* Washington, D.C.: U.S. Departament of Education, OERI.
- **Secada, W.**. (1992). Race, ethnicity, social class, language, and achievement in mathematics, in *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* Edited by Douglas Grows.

¿Existieron mujeres matemáticas? Mito y conocimiento en la Historia de la Matemática.

Guyot, Violeta; Cerizola, Norma; Giordano, María F.[1]
Facultad de Ciencias Humanas, Universidad Nacional de San Luis, Argentina.

El presente trabajo se enmarca en una de las líneas del Proyecto de Investigación "Nuevas tendencias epistemológicas. Su impacto en las Ciencias", perteneciente al sistema de ciencia y técnica de la Universidad Nacional de San Luis, Argentina.

Una de nuestras hipótesis de trabajo establece la relación entre las opciones epistemológicas e históricas y la enseñanza del conocimiento matemático. Sostenemos que dichas opciones inciden en la calidad de los procesos de producción y transmisión del conocimiento matemático en las situaciones de enseñanza.

El primer problema que se plantea es el tipo de relación entre la epistemología de la Matemática y la Historia de esta disciplina. Desde la perspectiva clásica ellas constituían dos dominios de conocimiento vinculados por una relación de exterioridad. Hoy sabemos, después de los análisis de los epistemólogos historiadores, fundamentalmente por los trabajos sobre Fundamentos de la Matemática de Lakatos, que "la historia de la ciencia sin la epistemología es ciega y la epistemología sin la historia de la ciencia es vacía"

Alexandre Koyré, historiador del pensamiento científico, ya había adelantado acerca de la necesidad, de pensar el fenómeno de la producción del conocimiento científico introduciendo aspectos históricos extra científicos.

Su modelo historiográfico contemplaba la emergencia de las teorías científicas vinculadas a las condiciones de posibilidad que implicaban las ideas transcientíficas vigentes en esa época. Ellas incluyen, mitos, creencias, ideas religiosas, filosóficas, convicciones acerca de la composición del mundo, de los problemas que resultan interesantes investigar, de los procedimientos adecuados a tal fin, entre otras. Este aspecto que durante mucho tiempo fue excluido de la cuestión epistemológica, permite sin embargo, esclarecer las razones del éxito o el fracaso en la producción de las teorías científicas, así también como su aceptación o rechazo.

Un papel importante es el representado por las "comunidades científicas", quienes fijan las reglas del juego, según las cuales se realizan las prácticas científicas, de acuerdo a las normativas aceptadas a través del consenso, en cada situación histórica. También a este nivel operan relaciones de poder - saber que fijan la posición de los sujetos dentro de la comunidad científica, los códigos de compromiso, según los cuales se los reconoce como miembros pertenecientes o no a la misma.

1 Proy de Inv. 4-1-9301. Facultad de Ciencias Humanas, Universidad Nacional de San Luis, Argentina.

Otro aspecto interesante, es la posición del historiador, que realiza la selección de los datos, recorta los hechos históricos, les asigna un papel de relevancia o los excluye. Esto por un lado viene condicionado por su opción epistemológica e historiográfica y por otro, pone de relieve una posición de poder. Según Foucault así se instala una política de la verdad histórica en la que se disimulan las operaciones subjetivas del historiador y se presenta el relato "objetivamente", soslayándose el sistema de exclusiones en la presentación de "los hechos" históricos.

Un caso notable de esta situación es el de las **mujeres matemáticas,** cuya rica producción no aparece en las historias de las matemáticas oficiales, salvo en casos excepcionales en los que se las menciona al pasar en la minuciosa trama de una narración protagonizada por matemáticos.

Siguiendo esta línea de investigación nos reencontramos con Hipatía (370 - 415) reconocida como la primera matemática de la Antigüedad, quien realizó importantes aportes en álgebra, escribió comentarios sobre la aritmética de Diofanto y un tratado sobre la geometría de las cónicas de Apolonio. Quién fue Hipatía ? Porqué merecería figurar en un lugar destacado en la historia de la matemática ?

Había nacido en Alejandría, ciudad fundada por Alejandro Magno (332 AC), y que fuera el foco intelectual del Mediterráneo, el máximo exponente de la cultura helénica por aquella época. Hija de Teón, matemático y astrónomo, director del museo de Alejandría, fue iniciada en la importante tradición matemática heredada de Euclides, Apolonio, Eratóstenes, Tolomeo, Pappus y Diofanto.

El desempeño público, que significó la enseñanza, trajo gran prestigio a Hipatía, al mismo tiempo que recelos y envidias. No obstante lidera grupos científicos en los que se discuten las cuestiones más importantes de su época y es llamada a menudo por los magistrados como consultora de asuntos administrativos y políticos de la ciudad.

La situación política se agrava cuando en el año 412 Cirilo asume como Patriarca de Alejandría e inicia una persecución contra los judíos y los neoplatónicos. Para la pagana Hipatía los acontecimientos se tornan peligrosos. Pero a pesar de ello decide sostenerse en sus convicciones, vistiendo el manto de los filósofos y enseñando públicamente los escritos de Platón, Aristóteles y de otros sabios griegos. Desoyendo los ruegos de Orestes de que se convierta al cristianismo, asume la defensa de la tradición científica y filosófica de la Grecia clásica, lo cual hace de ella el blanco de los ataques de fanáticos estimulados por Cirilo. Así, un día de Marzo del año 415, es capturada por monjes violentos que después de martirizarla brutalmente la asesinan. Tenía 45 años y su muerte hoy representa el símbolo del fin de Alejandría como centro matemático y cultural del mundo antiguo.

El legado matemático de Hipatía, incluye los comentarios que realizara conjuntamente con su padre de los Elementos de Euclides, obra que bajo esa forma ha llegado hasta nosotros; la escritura de un libro sobre Tolomeo; una novedosa producción acerca de la aritmética de Diofanto que enriquece incluyendo soluciones alternativas a las ecuaciones indeterminadas (conocidas hoy como ecuaciones diofánticas) y desarrollos especiales sobre ecuaciones cuadráticas. A esto hay que agregar un Tratado sobre las Cónicas de Apolonio en 8 libros y la elaboración de tablas para registrar los movimientos celestes, las que denomina Canon Astronómico.

Su inquietud científica la llevó a diseñar varios instrumentos, entre ellos el astrolabio plano, para medir la posición de las estrellas, el Sol y los planetas y calcular el tiempo y el signo ascendente del Zodíaco. También inventa un aparato para medir el nivel del agua y un hidrómetro graduado de latón para determinar la densidad de los líquidos. Pero la significación de Hipatía para una historia de la ciencia, aparece ligada a su talento matemático demostrado en toda su producción, sobre todo porque en aquella época no existían los símbolos algebraicos que facilitaran los desarrollos que realizó siguiendo la tradición de Diofanto.

Hipatía fue la víctima de la intolerancia de sus contemporáneos que no pudieron comprender el valor de sus conocimientos y su enseñanza y de los historiadores de la Matemática que la excluyeron, silenciando sus aportes al desarrollo de esta ciencia.

Otro interesante ejemplo es el representado por Sonya Kowalewska (1850-1891) extraordinaria mujer y matemática del siglo XIX. Nacida en Rusia en una época de campañas bélicas, algunas con intenciones anexionistas, y un país sumido en un atraso económico y cultural que contrastaba con el resto de Europa. Sin embargo, a partir de la década del 60 y con el ascenso al poder de Alejandro II, se inician una serie de reformas liberales que mejoran la situación en materia política, jurídica y social. Las mujeres seguían siendo relegadas de acuerdo a una tradición conservadora que no les permitía realizar estudios superiores, lo que dio origen a un original sistema a través del cual lograban salir del país y dirigirse a otros centros europeos con la aspiración de lograr mayores libertades. Se trataba de realizar "matrimonios de conveniencia" que les permitían viajar a otros países con la intención de realizar estudios universitarios.

Ante la imposibilidad de seguir estudios superiores en Rusia, se rebela contra su familia y, en complicidad con su hermana, decide casarse con Vladimir Kowalewsky. La pareja se instala en Heilderlberg con la esperanza de que Sonya comience sus estudios universitarios. Su frustración fue grande pues tampoco la admitieron por su condición de mujer, consiguiendo sólo una dispensa especial para asistir a clases de matemática y física. Bunsen, a pesar de no ser partidario de que las mujeres accedieran a la universidad, acabó aceptándola en su laboratorio como alumna.

Su éxito en Heilderlberg y el distanciamiento con su marido, la llevó a pensar en dirigirse a Berlín, conociendo la fama del renombrado matemático Weierstrass. Este a pesar de no estar interesado en tener una estudiante mujer, la puso a prueba dándole difíciles problemas para resolver. Este período representó una de las etapas más productivas de Sonya Kowaleswka. En 1874 completó tres trabajos originales: Sobre la teoría de Ecuaciones Diferenciales Parciales; Sobre la reducción de ciertas clases de Integrales Abelianas de tercer orden a Integrales Elípticas, y Comentarios y observaciones suplementarias a las investigaciones de Laplace sobre los Anillos de Saturno.

Weierstrass hace entonces las gestiones para que la Universidad de Gottingen le otorgue el doctorado "in absentia". Este alto reconocimiento es otorgado "suma cum laude" en 1874, por su trabajo "Teoría de las Ecuaciones diferenciales parciales", obra en la que aparecía el teorema conocido hoy como "Cauchy- Kowalewska sobre la existencia y unicidad de las soluciones a esas ecuaciones".

A pesar de haber obtenido el Doctorado en Matemática con la máxima distinción, no había en Europa un puesto para una mujer de probados méritos científicos. Este fue uno de los motivos por los cuales regresa a Rusia, desempeñándose como maestra de aritmética para niñas en una escuela primaria. Su ilusión de producir la apertura de las universidades a las mujeres, la llevó a solicitar ante el Ministerio de Educación, que se le permitiera rendir una prueba de admisión, para de ese modo acceder a un cargo académico. Tal solicitud le fue denegada.

Durante dos años pierde contacto con Weierstrass, no respondiendo a las cartas que le envía el maestro. Poco tiempo después, en 1880, fue invitada a dar una conferencia en un congreso de naturalistas y médicos rusos, donde conoció al matemático Mittag-Leffler. En ese mismo año decide volver a Berlín, donde Weierstrass le sugirió que trabajara sobre la propagación de la luz en los medios cristalinos. Así llega a elaborar dos trabajos sobre el tema, los que fueron publicados en el Acta Mathematica.

Dos años más tarde fue nombrada miembro de la Sociedad Matemática en París, y luego de superar difíciles problemas familiares, por gestiones realizadas por Mittag-Leffler se traslada a Estocolmo, donde después de un año de trabajo le otorgan un cargo de profesor asalariado por cinco años.

"Al comienzo la vida de Sonya en Estocolmo constituía un reto: dictaba cátedra tres veces por semana, sobre los temas más nuevos y más avanzados del análisis, supervisaba una gran cantidad de estudiantes y estaba realizando la investigación más importante de su carrera".

En 1886 decide volver a París. Allí se entera de que el Prix Bordin, el mayor reconocimiento de la Academia de Ciencias Francesas, se ofrecería por el mejor trabajo sobre la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo.

Retorna a Rusia , donde su colega Chebishev consigue que fuera la primera mujer en recibir el nombramiento de miembro de la Academia Imperial de Ciencias, pero a pesar de ello, ni siquiera logró que la admitieran en sus reuniones. Vuelve a Estocolmo en Febrero de 1891, ya para ocupar un puesto vitalicio en la Universidad, pero unos días más tarde muere, víctima de un ataque cardíaco. Sin embargo, a pesar de las contribuciones que hicieron estas dos mujeres, como tantas otras (Sophie Germain, María Agnesi, Ada Lovelace y Emmi Noether) la reconstrucción histórica de los procesos de producción, ha manifestado un poder de exclusión en relación a la posición que ocupaban, en cuanto sujetos activos en la historia de la matemática. Este hecho ha sido factible de constatar en un rastreo de sus posiciones en las historias de las matemáticas más importantes, utilizadas como referentes en la materia. Allí, salvo en casos excepcionales, aparecen desvalorizadas o francamente ignoradas.

Es necesario que estas situaciones sean develadas para posibilitar la reconstrucción de una historia, donde todos sus protagonistas, independientemente de diferencias de sexo, raza o religión, puedan ser reconocidos y valorados. Esto además posee un fuerte efecto al nivel de la enseñanza, dado que permite un acercamiento diferente al conocimiento que se enseña, proceso en el que también se han permitido discriminaciones y exclusiones, olvidos y restricciones.

Referencias Bibliográficas:

- **Kline, M.** (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Alianza Universidad, Madrid.
- **Bell, E.** (1995). *Historia de las matemáticas* Fondo de Cultura Económica,México.
- **Boyer,C.** (1987). *Historia de la matemática* Alianza, Madrid.
- **Vera, F.** (1965). *Veinte matemáticos célebres* Libros del Mirasol.
- **Sarton.** *Historia de la Ciencia* Eudeba, Buenos Aires, Varias ediciones
- **Bernal.** (1978). *Historia social de la Ciencia* Ed Península,Barcelona.
- **Lelionnais.** (1962). *Las grandes corrientes del pensamiento matemático* Eudeba, Buenos Aires.
- **Dieudonné, J.** (1989). *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy.* Alianza Universidad, Madrid.
- **Aries y Duby.** (1990). *Historia de la vida privada* Taurus, Madrid.
- **Duby y Perrot.** (1992). *Historia de las mujeres* Taurus, Madrid.
- **Alic, M.** (1991). *El Legado de Hipatía* Siglo XXI ,México.

Formación de habilidades en los alumnos para estudiar nuevas materias

Elena Dmitrievna Nesterova
División de Ciencias Básicas, C.U.C.E.I.
Universidad de Guadalajara, Jal. México.

"La inteligencia puede ser enseñada"

Whimbey

Resumen:

Esta investigación propone como finalidad determinar los métodos y las técnicas que tratan de mejorar el rendimiento del escolar con relación a un programa o niveles preestablecidos. El diagnóstico, mediante la aplicación de un pretest, permite llegar a un conocimiento más preciso del educando y orientar mejor las actividades de enseñanza-aprendizaje. Los materiales didácticos bien desarrollados y adaptados a la estructura cognitiva de los alumnos intervienen y facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje; despiertan el interés del alumno; sirven para adecuar los contenido y la metodología

El proceso de matematización del conocimiento científico es uno de los factores de integración de las ciencias. La matemática actual refleja la aceleración del proceso de dialectización de las mismas en la adecuación de las condiciones de la revolución científico-técnica. El tránsito de la forma práctica a la forma teórica y viceversa, de la sistematización del conocimiento matemático, representa un movimiento didáctico cuyo efecto es la matemática unificada.

Es indiscutible que para los pedagogos es necesario profundizar la actividad cognoscitiva de los alumnos en el proceso de instrucción precisamente hablamos de esto cuando decimos " el perfeccionamiento de rendimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje". Se supone que es necesario dirigir esta actividad, hay muchos métodos para lograrlo, pero lo más importante es el contenido de los materiales didácticos, el orden de introducción de uno u otro curso, los temas del curso y las conexiones entre ellos. Además, tener en cuenta la influencia que una u otra estructura de los materiales didácticos ejerza para la motivación y la formación de interés en la instrucción. La investigación teórica de los materiales didácticos puede llevar al pronóstico de valores de didácticos de unos u otros sistemas de exposición del curso o tema, además, determinar la "accesibilidad" de los materiales didácticos para los alumnos.

Se consideran dos tipos de *la accesibilidad: "absoluta" y "relativa"*. La accesibilidad absoluta de los materiales didácticos caracteriza la capacidad de los alumnos para asimilar en general, la materia dada, y se define por su nivel de sus conocimientos previos. La correlación entre el volumen necesario de conceptos primarios (el nivel de preparación del alumno) para estudiar el curso nuevo y el volumen real de estos conceptos en el bagaje de conocimientos del alumno, determina el grado de accesibilidad absoluta para el alumno dado. La accesibilidad relativa de los materiales didácticos muestra

la diferencia para comprender los mismos materiales en maneras diferentes de su exposición, para los alumnos que tienen prácticamente un mismo nivel de preparación previa.

El problema consiste en que el estudio de cualquier disciplina está atado al empleo de conceptos de dos tipos. Uno de estos, que los alumnos ya tienen un bagaje de conocimientos *primarios* y sirven para introducir y explicar los nuevos conceptos, que son *secundarios.* Los conceptos secundarios se definen en base de los conceptos primarios. Es evidente que los alumnos, que no tienen en su bagaje de conocimientos, suficientes nociones básicas, son incapaces de aprender los conocimientos nuevos. Las ideas nuevas sólo pueden aprenderse y retenerse útilmente si se refieren a conocimientos y proposiciones ya disponibles (Ausubel y Novak, 1989; Gagné, 1994 entre otros). El análisis de la estructura de los materiales didácticos permite determinar los conceptos primarios que se usan para el estudio y el volumen necesario de éstos en el bagaje de conocimientos de los alumnos.

Como muestra la práctica, en lo fundamental el profesor, al iniciar las clases de su curso, nada puede decir del nivel de preparación de sus alumnos y por consiguiente, no puede dirigir bien el proceso de instrucción. El diagnóstico (Trigueros, M. ,1994), mediante la aplicación de un pretest, permite llegar a un conocimiento más preciso del educando y orientar mejor las actividades de enseñanza-aprendizaje.

Consideraremos ahora este problema por otro lado; como regla, la dirección de la actividad cognoscitiva se realiza mediante los enunciados del profesor, los cuales contienen los programas de esta actividad, es decir, el programa de la transformación de la información transmitida. Sin la comunicación oral o escrita no es posible imaginar el proceso de instrucción. El entendimiento idéntico de los enunciados en el proceso de comunicación entre los alumnos y el profesor, representa la esencia del proceso de instrucción. Si los alumnos y el profesor hubieran usado las palabras en el mismo sentido, es decir , entendiéndolas igualmente, el estudio no habría tenido ninguna dificultad. Sin embargo, se sabe bien que existen problemas de aprendizaje a causa del entendimiento no adecuado de los enunciados del profesor del autor del libro de texto.

La incomprensión o el entendimiento erróneo de los enunciados puede ser una causa de las singularidades objetivas del lenguaje y además de las capacidades mentales. Es necesario conocer las causas eventuales de las alteraciones de la información para prevenir y evitarlas. *Saber observar los materiales didácticos desde el punto de los alumnos, es la condición necesaria para obtener éxitos en la comunicación entre los alumnos y el profesor.* No hay que entender esto como el conformismo al nivel de los alumnos, sólo tomar en consideración este nivel. En primer lugar, hablamos del lado cualitativo de los conceptos que forman el bagaje de conocimientos de los alumnos.

Una de las singularidades generales de la exposición de las disciplinas matemáticas es el lenguaje matemático de las definiciones de los conceptos.

La comunicación entre los alumnos y el profesor en el proceso de estudios de las matemáticas, exige necesariamente saber este lenguaje, lo que se define por el bagaje de palabras, es decir, por el juego de conceptos definidos matemáticamente, que se usan en la exposición de los materiales nuevos. Por lo tanto, son importantes no sólo los índices cuantitativos, sino también los índices cualitativos.

Gagné (1994) sostiene que el planteamiento de la enseñanza debe hacerse para el individuo. Sin embargo, en el proceso real de instrucción el profesor tiene un grupo de cuarenta individuos con los niveles de preparación considerablemente diferentes, que lo enfrente a un gran problema: ¿A que nivel orientarse? En busca de respuesta, el profesor inevitablemente llega a la idea, que antes de empezar estudiar la nueva materia, es necesario nivelar el estado inicial de los alumnos, ayudarlos a completar los huecos y sistematizar sus conocimientos, es decir, dar a cada alumno una posibilidad para adaptarse en las condiciones nuevas.

Al estudiar el desarrollo cognitivo, J Piaget da una gran importancia a la adaptación, considerando dos aspectos opuestos y complementarios un tiempo: la asimilación o integración de las influencias externas a las propias estructuras de la persona, y la acomodación o transformación de las propias estructuras en función de los cambios del medio ambiente. La adaptación refleja al sujeto, requisito indispensable para la individualización de la enseñanza, se posibilita individualizando tanto los elementos curriculares (objetivos, contenidos, etc.), la organización del aprendizaje (temporalización, agrupaciones flexibles, etc.) como el proceso de enseñanza-aprendizaje(Ginsburg y Oper, 1977). Por analogía con esta concepción de Piaget, llamaremos al tiempo necesario para la adaptación de los alumnos, *el periodo de adaptación.* Este periodo da al profesor la posibilidad de conocer y entender mejor a sus alumnos. La comprensión mutua entre los alumnos y el profesor crea las condiciones favorables para lograr éxitos en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El modelo que se propone para la metodología de organización de periodo de adaptación comprende las siguientes etapas:

1. Estructuración y análisis de la estructura de los materiales didácticos, organización lógica de los contenidos y determinación de los conceptos primarios.
2. Determinación de la accesibilidad de los materiales didácticos para el contingente dado de los alumnos, mediante la aplicación de examen diagnóstico.
3. Organización de las actividades correctivas (la asesoría, el trabajo independiente) para dar la posibilidad a los alumnos adaptarse a las condiciones nuevas.
4. Adecuación de la metodología de exposición de los materiales didácticos en concordancia con los resultados del análisis de la estructura lógica y accesibilidad de los materiales didácticos.

Para la investigación teórica de los materiales didácticos (la primera etapa) se utiliza el siguiente modelo:

1. El inventario del contenido (los temas determinados por el programa del curso).
2. División de cada tema en los segmentos completos (formación de los conceptos, demostraciones de los teoremas y fórmulas).
3. Estructuración y análisis de la estructura de cada segmento del tema (significación de los elementos y carácter de las conexiones entre ellos).
4. Organización lógica del contenido de cada tema.
5. Ordenación de la sucesión de estudio de los temas.
6. Establecimiento de las conexiones interdisciplinarias.

La estructuración consiste en representar en una gráfica las relaciones existentes entre los elementos articulados (Heredia Ancona, B.,1990). La estructura cognoscitiva es un conjunto de los elementos cognoscitivos ligados en las redes complejas y sirve como el modelo de las conexiones que deben ser establecidas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Los elementos primarios en la estructura tienen sólo salidas, y los nuevos (secundarios), sólo entradas. La significación de los elementos se determina por la complejidad de las conexiones con los otros elementos de la estructura. Es evidente, que para enseñar las conexiones complejos es necesario más tiempo y atención. Los elementos con más conexiones son más dificiles y al mismo tiempo, más importantes. La práctica muestra que mayoría de los errores y dudas corresponden a estos elementos, además estos tienen más conexiones con otros temas. Sin entendimiento las conexiones entre los elementos lógicos, los alumnos tienen que memorizar la mayor parte de la materia. La ignorancia de la enseñanza de toda la complejidad de las conexiones lleva a los conocimientos erróneos. La comparación de la estructura y las conexiones, que establecen los alumnos en el proceso de aprendizaje, permite observar la manera de pensamiento de los alumnos. prever sus errores típicos y prevenirlos.

En la base de los resultados de esta investigación se elaboraron los materiales didácticos, programas y guías para los cursos matemáticos. (a nivel licenciatura): Geometría Eucideana, Algebra Vectorial y Geometría Analítica, Algebra Lineal, Cálculo. Actualmente estos materiales pasan las aprobaciones en el proceso de instrucción. Sin embargo, las primeras pruebas permiten hacer las siguientes conclusiones.

Los materiales didácticos bien desarrollados intervienen y facilitan el proceso de enseñanza aprendizaje; despierta el interés del alumno; sirven para adecuar los contenidos y la metodología. El programa define el contenido de la disciplina, los métodos de enseñanza, el carácter de los materiales didácticos, el tiempo de estudio, etc.. Lo que es más importante, el programa que indica los conocimientos a estudiar y los métodos para su coordinación, planea el tipo de pensamiento que se forma en los alumnos. Por lo tanto, el diseño del programa y el desarrollo de los materiales didácticos correspondientes para cada disciplina tiene mucha importancia **para todo el** sistema de educación.

Referencias Bibliográficas.

- **Ausubel, D.P.; Novak, J.D.; Hanesian, H.**, (1989). *Psicología educativa.* México:Trillas.
- **Heredia Ancona, B.**, (1990). *Manual para la elaboración de material didáctico.* México: Trillas.
- **Bonbir, A.**, (1971). *Pedagogía correctiva.* Madrid: Morata.
- **Bruner, J.**, (1988). *Acción , pensamiento y lenguaje.* Madrid: Alianza.
- **Gangé, R.M.**, (1976). *Planificación de la enseñanza.* México: Trillas.
- **Ginsburg, H., y Opper**, (1977). *La teoría de Piaget del desarrollo intelectual.* Prentice-Hall Int., Madrid: Editorial del Castillo.
- **Trigueros, M.**, (1994). *Diagnóstico para el aprendizaje de conceptos matemáticos.* ITAM.
- **Bennet, N.**, (1979). *Estilos de enseñanza y progresos del alumno.* Madrid: Morata.

Aprendizaje cooperativo en la resolución de problemas

Ciro Cerón Peralta SEIEM-SEP, México.
José Guzmán Hernández CINVESTAV-IPN, México.

Resumen:

La Propuesta teórica de ayudar a los estudiantes menos capaces por medio de la interacción con compañeros más competentes y con la ayuda de un adulto (profesor), está tomando fuerza en la enseñanza de las matemáticas. El presente experimento realizado con estudiantes de secundaria pudo constatar que por medio del aprendizaje cooperativo, se puede ayudar a los alumnos con algunas desventajas matemáticas a incrementar su potencial, por ejemplo, en resolver problemas matemáticos verbales.

Antecedentes:

En el ámbito de la literatura relacionada con la educación se percibe un profundo interés por ayudar a los estudiantes a desarrollar su aprendizaje. Por ejemplo, Vygostky (1978) afirma que la instrucción es buena sólo cuando se adelanta al desarrollo, creando un potencial para trabajar conceptos nuevos. El estudiante, por sí solo, puede funcionar hasta cierto nivel, sin embargo, su potencial se puede incrementar al cooperar con otros sujetos.

Vygotsky (ibid) señala dos niveles de desarrollo: el actual y el potencial. El primero está relacionado con la capacidad del sujeto de resolver problemas por sí mismo. El segundo está determinado por su capacidad de resolver problemas con la colaboración de un compañero más capaz o con la ayuda de un adulto, en este contexto, los estudiantes pueden trabajar temas que estaban considerados fuera de su competencia. El dominio del concepto nuevo es el resultado de la cooperación con personas más competentes. Vygotsky llama a esta interacción la Zona de Desarrollo Próximo.

Al respecto, Feuerstein (*et al.*,1980,1990) sugiere una dicotomía radical: aprendizaje directo *versus* aprendizaje mediado. Él afirma que en la primera modalidad el organismo se modifica a lo largo de su vida al interactuar directamente con los estímulos, por medio del aprendizaje observacional, del ensayo y error y del acondicionamiento. En la situación de aprendizaje mediado, un adulto o un compañero se establece entre el ambiente y el niño. De esta manera cambian radicalmente las condiciones de la interacción. El mediador selecciona, altera, amplifica e interpreta los objetos y procesos para el niño. En esta modalidad el organismo se transforma ayudado por un ser humano (padres, maestro, hermano o un compañero) que tomando en cuenta la situación del sujeto, organiza y estructura los estímulos en función de una meta.

De Corte (1995) señala algunas ventajas del aprendizaje cooperativo e interactivo en la enseñanza de las matemáticas y afirma que aprenderlas, no debe ser una empresa solitaria, más bien, es una actividad que se facilita en un contexto social. Él afirma que la interacción y cooperación social son cruciales en el aprendizaje. También hace mención de algunas actividades en el aprendizaje cooperativo, por ejemplo: intercambiar y negociar ideas, comparar métodos de solución y discutir argumentos, son actividades significativas en el contexto social. De corte (ibid) afirma que la cooperación del profesor es esencial para aclarar, explicitar y justificar la solución de algún problema.

Schoenfeld (1987) afirma que la teoría de Vygotsky se ha usado como argumento para trabajar con grupos pequeños, con el propósito de que los estudiantes interactuen y desarrollen su aprendizaje. Este investigador, en la resolución de problemas, trabaja en equipos. Él empieza su clase con la revisión de la tarea (problemas matemáticos), después distribuye hojas con problemas, divide la clase en pequeños grupos, de tres o cuatro estudiantes, con el propósito de que cooperen entre sí en la resolución de algún problema matemático, en seguida, él camina entre los equipos para revisar el trabajo y ofrece sugerencias que les ayuden a resolver un determinado problema. Cuando los alumnos han hecho un progreso razonable discuten los problemas ante todo el grupo.

El problema de investigación:

Polya (1945) afirma: *Si al estudiante, se le deja solo frente al problema, sin ayuda alguna o casi ninguna, puede que no progrese.* De manera similar, Schoenfeld (ibid) dice: *La resolución de problemas no siempre es una empresa solitaria.*

Estos investigadores sugieren la necesidad de interactuar con sujetos más capaces y que estos ayuden a desarrollar el aprendizaje de los estudiantes con desventajas matemáticas. Tales perspectivas ofrecen la oportunidad de explorar los procesos de aprendizaje en un contexto social y hace surgir el siguiente problema de investigación.

¿Cómo influye, en estudiantes con desventajas matemáticas, la interacción con sujetos más capaces en la resolución de problemas matemáticos verbales?

Metodología:

En el contexto teórico ya mencionado y bajo el paradigma cualitativo, se diseñó una investigación de tipo experimental, con el propósito de ayudar a estudiantes de secundaria a resolver problemas matemáticos en cooperación con otros estudiantes y con la ayuda del profesor. Se seleccionaron 21 alumnos, a quienes se les propusieron algunos modelos que ayudan en la resolución de problemas, tales como: Pictórico, ensayo y error, lineal, balanza y el algebraico, para que con estos, desarrollaran estrategias al resolver problemas (Cerón, 1995). La estructura específica que subyace en dichos problemas, son ecuaciones del primer grado con una incógnita, de la forma: $a+x=b$, $ax=b$, $ax+b=c$ (ecuaciones aritméticas), $ax+b=cx$, $ax+b=cx+d$ (ecuaciones algebraicas), con diferentes temas matemáticos, por ejemplo: repartos, edades, móviles, mezclas, etcétera. Se abordaron problemas de hallar o encontrar una cantidad desconocida. El papel de la variable era como incógnita específica.

La muestra se distribuyó en siete equipos con tres alumnos cada uno (ver figura 1), se les daba una hoja que contenía un problema que ellos tenían que resolver aplicando los modelos propuestos. Cuando terminaban de resolver un problema se analizaban las soluciones propuestas ante el grupo y después se continuaba con otro problema. Se procuró que en cada equipo estuviera un alumno capaz e interactuara con los menos capaces.

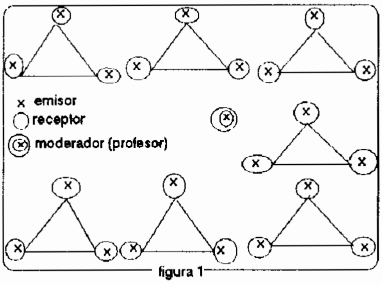


figura 1

Resultados:

Se observó que el estudiante capaz tomaba la iniciativa y ayudaba a sus compañeros menos capaces, principalmente en problemas que contenían ecuaciones aritméticas de la forma: $ax=b$, $a\pm x=b$. También se contó con la ayuda del profesor (que condujo el experimento), principalmente, en problemas difíciles de la forma: $ax+b=cx+d$, donde la incógnita aparece en ambos lados de la ecuación.

El siguiente cuadro resume algunas observaciones realizadas sobre la interacción de los estudiantes y el profesor en los momentos en que resolvían un determinado problema.

Estructura específica del problema: $ax+b=cx+d$

Contenido matemático: reparto.

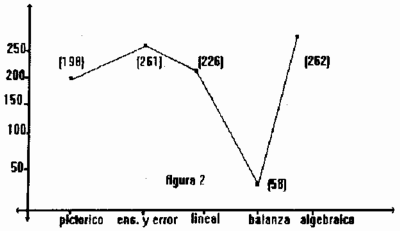
Texto del problema:

Sandra y Josefina recibieron una gratificación al terminar un trabajo, a Sandra le entregaron seis vales y $ 10, y Josefina recibió cuatro vales y $ 50. Si los vales son de la misma denominación y las dos recibieron igual pago, ¿de qué cantidad son los vales?, ¿cuánto recibió de compensación cada una? (Libro de conceptos básicos de Telesecundaria. Vol. II, pág. 578.)

Cuadro 1

Equipo		Interacción		Modelo usado				
	Alumnos	Compañero capaz	Adulto Profesor	Pictorico	Ensayo y Error	Lineal	Algebraico	Balanza
1	ABC	A	P	1	1	*	1	0
2	ABC	A	P	1	1	*	1	0
3	ABC	A	P	1	0	*	1	0
4	ABC	A	P	1	1	*	1	0
5	ABC	A		1	1	*	1	0
6	ABC	A	P	1	1	*	1	0
7	ABC	A		1	1	*	1	0

Código: 1= acierto 0= error
*= omisión A= alumno capaz



Las dificultades de los alumnos, al resolver un problema de manera independiente, disminuyeron cuando interactuaron en equipo. Los estudiantes de la muestra (ver figura 2) incrementaron sus estrategias para resolver determinados problemas, por ejemplo, recurrieron a usar el modelo algebraico, como estrategia de solución, hasta en 262 ocasiones y el modelo de ensayo y error en 261 veces.

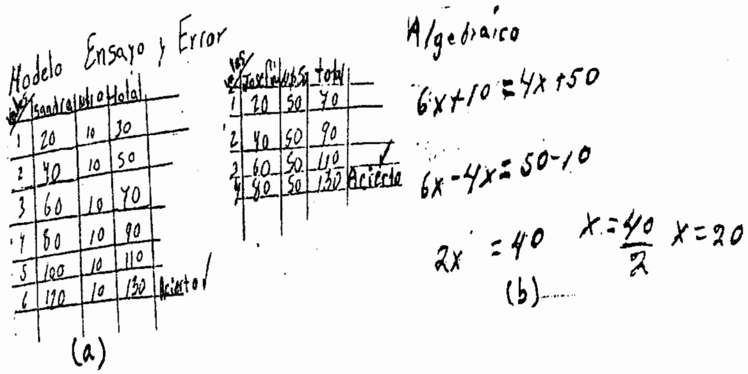


Figura 3

La cooperación en equipo influyó para que disminuyeran las dificultades reportadas en investigaciones anteriores (Filloy y Rojano,1984,1989) relacionadas con la modelación y resolución de ecuaciones donde la incógnita aparece en ambos miembros de la igualdad. Se observó que uno de los equipos, para resolver un problema, daba prioridad al modelo de ensayo y error, con el propósito de plantear por tanteos algún tipo de igualdad que cumpliera con la condición del problema (ver figura 3a). Posteriormente, a partir del modelo de ensayo y error, el equipo procedía a modelar la ecuación algebraica (ver figura 3b) que correspondiera con el texto del problema y hallar la solución correcta. (Las soluciones son del problema de *Sandra y Josefina*.)

Conclusiones:

El trabajo cooperativo en la resolución de problemas favoreció significativamente a los estudiantes que intervinieron en el experimento. La actividad cognoscitiva del alumno más capaz y la ayuda del profesor, adelantó el desarrollo de los miembros menos capaces del equipo. Tal interacción dio por resultado que emergieran estrategias en los estudiantes de la muestra. Se pudo confirmar una de las hipótesis de Vygotsky quien considera que la interacción social, es decir, la colaboración con otros compañeros o de un adulto, ayuda a desarrollar un potencial que les permite alcanzar niveles más altos de aprendizaje.

Referencias Bibliográficas:

- **Cerón, C.** (1995): *Propuesta de modelos para la resolución de problemas matemáticos con texto y las estrategias que pueden emerger en estudiantes de secundaria* (Tesis de maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México.
- **Feuerstein, R., Rand, Y., Hoffman, M.B., and Miller, R.** (1980): *Instrumental enrichment: An intervention program for cognitive modifiability*. Baltimore: University Park Press.
- **Feuerstein, R.** (1990): The theory of structural cognitive modifiability. In B.Z. Presseisen (Ed.), *Learning and Thinking styles: Classroom Interaction* (pp. 68-134). Washington, DC: National Education Association.
- **Filloy, E. and Rojano, T.** (1984): From an arithmetical to a an algebraic thought. *Proceedings of the sixth PME-NA* Conference (pp. 51-56). Madison: University of Wisconsin.
- **Filloy, E. and Rojano, T**. (1989): Solving equations: The transition form arithmetic to algebra, in *For the Learning of Mathematics 9*, 2, (pp. 19-25).
- **Pólya, G.** (1945): *How to solve it?* Princeton: Princeton University Press.
- **Schoenfeld, A.** (1987): *What's all the fuss about metacognicion?* Cognitive Science and Mathematics Education. Alan H. Schoenfeld (Ed.). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Hillsdale. N. J.
- **Vygostky, L.** (1978): *Mind in Society*. The development of higher Psycological Process. Harvard University Press.

Experiencias en la impartición de un curso de preparación para el ingreso a la educación superior en la disciplina matemática

Benito Gómez Martínez
Ramón J. Almeida Fernández
Adriana Martín Caballero
Universidad de Matanzas, Cuba

Resumen:

Este trabajo consiste en la exposición de las experiencias alcanzadas en la impartición, durante cuatro años, de un curso de preparación para el examen de ingreso a la Universidad en la disciplina Matemática.

Aquí se hacen consideraciones sobre los objetivos del programa de preparación para el ingreso, los ejercicios a seleccionar, las principales dificultades que presentan los estudiantes en los distintos temas, etc.

También se incluye un informe estadístico sobre los resultados obtenidos en estos años con este curso de preparación.

Toda esta experiencia acumulada nos ha permitido elaborar un folleto de ejercicios con sus respuestas y soluciones, que actualmente estamos empleando.

Introducción:

A partir del año 1985 se comenzó la ejecución de una investigación conjunta entre la Universidad de Matanzas, Cuba y el Instituto Superior Pedagógico "Juan Marinello" de esta propia Ciudad en colaboración con la dirección provincial del Ministerio de Educación.

Esta investigación estaba encaminada a profundizar en el conocimiento de las causas que determinan las dificultades de falta de articulación entre el nivel medio y el superior en la enseñanza de la Matemática. Este problema no es exclusivo, por cierto, de nuestra provincia y nuestro país, sino que es un problema aún no resuelto internacionalmente.

En los resultados de los exámenes de ingreso a la Educación Superior se han puesto de manifiesto que subsisten determinadas insuficiencias en la formación matemática del egresado del nivel medio con respecto a los requerimientos del nivel superior.

Por todo esto, se decidió encaminar el trabajo intentando determinar las dificultades y deficiencias fundamentales que presenta la enseñanza de la Matemática en el nivel medio superior de enseñanza en la provincia de Matanzas, que permitiera orientar un plan uniforme de preparación para el ingreso en la Educación Superior para los estudiantes que egresen del grado 12 en la provincia.

Desarrollo:

Por determinadas razones la investigación mencionada al inicio de la introducción se interrumpió y no continuó, pero nosotros ya de modo independiente seguimos trabajando en esta línea por ser de nuestro interés profesional. En el marco de la referida investigación y después fuera de ella , realizamos un número considerable de visitas al Municipio de Jagüey

Grande, que fue seleccionado para este trabajo, pues se tomó en cuenta la elevada densidad de población estudiantil que el mismo presenta, debido a la ubicación allí de los preuniversitarios en el campo.

Estas visitas tenían varios propósitos. Entre los más significativos, se encuentran:

- Realizar encuestas a los docentes.
- Efectuar entrevistas individuales con los dirigentes educacionales tanto a nivel de escuela como municipales.
- Llevar a cabo entrevistas grupales con los estudiantes de grado 12.
- Ejecutar sesiones de trabajo metodológico con los profesores de grado 12 del municipio.

Las encuestas con los docentes tendían a fijar algunas cuestiones a nuestro juicio de interés, tales como:

- Años de experiencia de los profesores en la impartición de la disciplina.
- Años de experiencia de los profesores en la impartición de la disciplina en grado 12.
- Criterios de los docentes con respecto a los programas.
- Criterios de los docentes con respecto a las orientaciones metodológicas
- Utilización (o no) de variedad de textos al preparar las clases.
- Criterios sobre los textos.
- Modo de orientar y controlar el estudio independiente.
- Criterios sobre el sistema evaluativo.
- Interés sobre determinadas temáticas de postgrado.
- Criterios sobre la conveniencia o no de elaborar materiales de apoyo para preparar a los estudiantes para el examen de ingreso a la Educación Superior.
- Del mismo modo en las entrevistas con los estudiantes orientamos la discusión hacia estos mismos temas, siendo ellos de la opinión de necesitar una preparación más rigurosa que la que en esos momentos recibían.

Sobre la base de estos estudios llegamos a la conclusión de que era necesario elaborar materiales de apoyo para la preparación para el ingreso, tomando en cuenta todas las sugerencias, inquietudes y preocupaciones planteadas tanto por docentes, como estudiantes y además por las conclusiones que arribamos después del análisis de las pruebas de ingreso y el estudio de los errores y deficiencias más significativas y frecuentes de los estudiantes en las mismas.

El estudio del trabajo de los estudiantes en las pruebas de ingreso nos llevó a la conclusión de que entre otras deficiencias, algunas de las más significativas eran las siguientes:

- Dificultad en la interpretación de una situación problémica.
- Marcada tendencia al nivel reproductivo en las respuestas a preguntas.
- Dificultad con las preguntas de carácter integrador.
- Además la Geometría se destaca como la rama en que se encontraron las mayores dificultades a la hora de enfrentar las pruebas de ingreso.

Después de todo este trabajo comenzamos la elaboración de un material que sirviera de apoyo a profesores y estudiantes en su trabajo de preparación para los exámenes de ingreso. Al hacerlo tratamos de seleccionar ejercicios que tendieran a desarrollar aquellas habilidades que a nuestro juicio permitirían enfrenar las dificultades anteriormente señaladas. Algunos de estos ejercicios están tomados de los textos tradicionales, otros de textos menos comunes, o nos han sido facilitados por colegas, tomados de las pruebas de ingreso y también una buena parte han sido elaborados por nosotros.

Con todo esto, hemos elaborado el folleto que adjunto a este trabajo presentamos y para el cual en este momento estamos preparando un conjunto de indicaciones metodológicas. Este folleto contiene más de 400 ejercicios además de algunos pequeños resúmenes teóricos, así como las respuestas a todos los ejercicios.

Existe además otro folleto con las soluciones a dichos ejercicios. Ese folleto fue elaborado por nosotros, pero recibimos la valiosa colaboración de los alumnos ayudantes, estudiantes de primer año de ingeniería industrial de la Universidad de Matanzas, que dieron solución a más de la mitad de los ejercicios.

Hace en este momento cuatro cursos (en la preparación para el ingreso de los cursos 93-94, 94-95, 95-96, 96-97) que este folleto de ejercicios se está poniendo en práctica en los cursos de extensión universitaria de preparación para el ingreso que desde hace 5 años impartimos. La matrícula a estos cursos es libre, en ellos se inscriben estudiantes procedentes de todas las escuelas de nivel preuniversitario del municipio y en ocasiones de otros municipios.

En los anexos pueden consultarse las tablas No. 1 y No. 2 que informan sobre los resultados obtenidos por los estudiantes matriculados en estos cursos comparándolos con los resultados obtenidos por el municipio en su conjunto.

Conclusiones:

Las actuales características de los exámenes de ingreso a la Educación Superior requieren, según nuestra opinión, que los estudiantes que a ellos se presentan, sean entrenados tomando en cuenta las dificultades principales que se han detectado tanto en el decursar de la aplicación de los exámenes de ingreso como en la práctica misma, avalados también por el criterio de los profesores de la enseñanza pre-universitaria,, en los cuales ya se concentra una buena carga de experiencia.

Consideramos que esa preparación ha de ser sistemática, organizada y dirigida a trabajar en los puntos críticos, llamémosle así, de los actuales contenidos que se plantean para los exámenes de ingreso a la Educación Superior

Referencias Bibliográficas:

- Educación Superior, Educación Superior Contemporánea, Mined, Varona, SCMC.
- Literatura, artículos y ponencias sobre Enseñanza de la Matemática.
- Exámenes de ingreso.
- Informes de los tribunales calificadores.
- Pruebas de nivel.
- Programas de Matemática Grados 7º - 12º.
- Textos de Matemática Grados 7º - 12º.

El perfil del profesor de matemáticas en la educación secundaria: un estudio sobre sus concepciones y actitudes

Matías Camacho, Josefa Hernández, Martín M. Socas
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna - Islas Canarias. España

Es evidente que los cambios curriculares en Matemáticas que se desarrollan en la actualidad no deben pasar inadvertidos a la hora de formar profesores para la enseñanza secundaria, tanto en su formación inicial como permanente, ya que se requiere que éstos estén preparados para afrontar con expectativas de éxito los movimientos renovadores que se llevan a cabo en los diferentes países. Tales movimientos se rigen por unos parámetros similares que podemos resumir en fomentar la actividad matemática para facilitar un aprendizaje significativo, donde el "hacer" Matemática juega un papel esencial.

Desde nuestra perspectiva de investigadores y formadores de profesores debemos arbitrar procedimientos que aproximen al futuro educador a la realidad educativa más inmediata. Diferentes estudios han puesto de manifiesto que la labor que debe desarrollar el educador de matemáticas está condicionada por sus concepciones, creencias y actitudes tanto hacia la matemática como hacia su enseñanza (Romberg y Carpenter, 1986).

En nuestro país, el perfil del profesor que se desprende de la propuesta curricular de Matemáticas de la Secundaria (MEC, 1989) requiere, entre otras cosas de un profesorado capaz de: interpretar un currículo abierto que considere la matemática como una disciplina que evoluciona continuamente; asumir que la actividad matemática juega un papel esencial en la construcción del conocimiento matemático; considerar la resolución de problemas como foco fundamental para el desarrollo de los conceptos matemáticos; desarrollar una actitud positiva hacia la matemática; presentar la matemática como expresión y creatividad; y facilitar una matemática para todos reduciendo en lo posible los aspectos más abstractos.

La investigación que estamos realizando, tanto con profesores en formación como en activo, pretende, después de constatar si existe o no relación entre el estilo de profesor que se forma en nuestras universidades y el que propone el Libro Blanco (MEC, 1989) de la reforma educativa, establecer vía la resolución de problemas un programa de formación que propicie cambios de actitudes y ayude a entender mejor la dinámica de los procesos implicados, que le permitan analizar en el sentido más global el cambio curricular y arbitrar modelos de intervención que propicien dicho cambio.

Presentamos aquí un estudio empírico y descriptivo con el propósito de:

a) Comparar el estado de opinión sobre la Matemática y su enseñanza entre licenciados de Matemáticas y de ciencias afines que aspiran a ser profesores de Matemáticas de enseñanza Secundaria con el objetivo de establecer criterios que faciliten la elaboración de modelos activos de intervención tanto en la formación inicial como permanente y que respondan a las finalidades de estos planteamientos.

b) Analizar la relación existente entre el perfil del profesor que actualmente se supone "preparado" para formar parte de la comunidad de educadores de matemáticas y el estilo de profesor propugnado por la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE)

Métodos:

La información es extraida de un cuestionario final de 25 items, confeccionado a partir de otro más general de 60 items, utilizado y descrito en trabajos anteriores (Camacho, Hernández y Socas, 1995, 1997) y administrado al inicio del curso académico 1994-95. Para la redacción del cuestionario definitivo fue necesario diseñar un modelo teórico basado en la categorización de los items de información. En este proceso hemos seguido un modelo mixto que combina las técnicas cualitativas y cuantitativas, que se ha desarrollado en varias fases.

Las **categorías** consideradas y que creemos que describen el perfil de profesor anteriormente señalado son definitivamente seis: 1) La Matemática como una disciplina abierta (5 items); 2) La matemática como una "actividad" (6 items); 3) La resolución de problemas (3 items); 4) Actitud hacia la matemática (4 items); 5) La matemática como expresión (4 items); 6) La matemática para todos (3 items).

Los descriptores de las diferentes categorías se redactaron en forma de proposiciones afirmativas o negativas a las que debían responder de acuerdo-indiferente-en desacuerdo. Las respuestas fueron valoradas de 1 a 3 puntos al objeto de cuantificar los resultados en las distintas categorías y poder utilizar una escala tipo Likert.

La población a estudiar fue de 54 estudiantes, de los cuales 23 eran alumnos del último curso de la licenciatura de Matemáticas y de la especialidad de Matemática Fundamental, dispuestos a cursar dos semestres de Didáctica de las Matemáticas, los 31 restantes son licenciados (farmacia, química y afines, física, estadística e investigación operativa, matemática fundamental y económicas) que esperan obtener el Certificado de Aptitud Pedagógica (CAP) para aspirar a ser profesor de Matemáticas en secundaria.

Resultados y discusión:

En la tabla 1 presentamos la media y la desviación típica de las puntuaciones obtenidas al sumar las puntuaciones en las distintas categorías y por grupos de alumnos y las puntuaciones máximas que se podían alcanzar. El valor máximo que hemos considerado como puntuación ideal esperada más próxima al perfil propuesto por la LOGSE es 75.

		Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	
Categoría	Totales	5º Matem.	Quím. y afines	Físicas	Mat. Estad.	Mat. Fundam.	Económic.	Máx
1	11.706 (1.879)	11.304 (1.987)	12.250 (0.957)	12.600 (2.074)	12.200 (1.988)	11.333 (2.082)	11.500 (1.643)	15
2	13.509 (2.044)	13.034 (2.033)	13.500 (3.697)	14.400 (1.140)	13.800 (1.476)	13 (1)	14.125 (2532)	18
3	5.815 (1.518)	5.522 (1.201)	6.250 (.957)	7.800 (2.168)	5.273 (.467)	8 (2.646)	5.875 (1.959)	9
4	10.407 (1.339)	10.043 (1.665)	10.250 (.5)	11 (.707)	11 (.1)	10.333 (1.528)	10.375 (1.061)	12
5	8.491 (1.793)	8.261 (1.573)	8.500 (2.646)	8.600 (.837)	8.727 (1.679)	10.667 (1.155)	7.714 (2.498)	12
6	7.963 (1.400)	8.348 (1.265)	8.5 (1)	7.8 (1.095)	7.818 (1.471)	8.333 (1.155)	8.75 (1.669)	9
TOTAL	57.891	56.512	59.250	62.400	58.818	59.666	56.339	75

Tabla 1

Con relación al primer estudio dirigido a comparar el estado de opinión sobre las Matemáticas y su enseñanza que permita establecer la relación entre el papel del profesor de Matemáticas de Enseñanza Secundaria y las concepciones sobre ella que poseen los estudiantes que desean formar parte de la comunidad de educadores de matemáticas, podemos observar que no existen diferencias significativas entre los grupos. Para ello realizamos una Anova entre las puntuaciones de las distintas categorías y los grupos de alumnos, utilizando el paquete estadístico SYSTAT. Las anovas dieron resultados no significativos y sólo con respecto a la categoría 3 el Anova mostró un efecto marginalmente significativo entre ellos: $F(5,48)=3.755$, $p=.039$. Del análisis de la tabla 1 se ve como los grupos 1, 4 y 6 muestran medias más bajas que los restantes.

Con relación al segundo propósito, observamos que los profesores encuestados se alejan entre 13 y 19 puntos de los aspectos del perfil exigido en la reforma educativa. Ello se desprende de algunos de los resultados obtenidos dentro de las seis categorías establecidas que difieren notablemente del papel asignado al profesor en la reforma de la educación matemática.

Conclusiones:

A modo de conclusión, vemos que de las respuestas dadas por los seis grupos de profesores estos no presentan diferencias notables con relación a las seis categorías objeto de estudio pero sí se alejan del perfil del profesor propugnado por la reforma educativa. Dándose un aparente dilema entre las concepciones sobre la Matemática y sus ideas acerca de lo que debe ser la enseñanza de la Matemática, lo que puede se formulado en forma de obstáculo cognitivo. Esto nos sugiere la necesidad de implantar programas de actuación en la formación del profesorado de Matemáticas en secundaria que faciliten cambios en sus concepciones y actitudes hacia la matemática para afrontar con éxito estas innovaciones curriculares, pero estos programas de actuación pueden ser similares para los diferentes licenciados en Ciencias que optan por ser profesores de Matemáticas de Secundaria.

Con relación a los instrumentos elegidos conviene indicar que estos permiten la elección entre una variedad de respuestas sin ánimo de imponer ninguna concepción, utilizar un modelo de categorización entre las variables y establecer agrupamientos por afinidades entre los grupos de profesores mediante el análisis cluster.

Pensamos además que este tipo de estudios, que permiten descubrir concepciones y actitudes de los profesores en formación, es necesario completarlos con estudios longitudinales de las concepciones, creencias y actitudes de estos futuros profesores desde su entrada en la Universidad hasta su término (Camacho, Hernández y Socas, 1993) y también, como señala Gattuso (1994), estudiar la influencia de estas concepciones en la práctica docente, para poder implantar con éxito programas de formación del profesorado en Matemáticas.

Referencias Bibliográficas:

- **Camacho, M., Hernández J. y Socas, M.** (1995). Concepciones y actitudes de futuros profesores de secundaria hacia la Matemática y su enseñanza: Un estudio descriptivo. En L. J. Blanco L. y Mellado, V. (Eds.), *La formación del profesorado de Matemáticas y Ciencias en España y Portugal,* (pp. 84-98). Badajoz, España.
- **Camacho, M., Hernández J. & Socas, M.** (1997). An analysis of future Mathematics Teachers' conceptions and attitudes towards Mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (en prensa).
- **Gattuso, L. & Mailloux, N.** (1994). Conceptions about Mathematics teaching of preservice elementary and High School teachers. En J.P. Ponte & J. Filipe (eds), *Proceedings of the XVIII PME Conference*, (Vol. 2, pp. 392-399), Lisbon, Portugal.
- **M. E. C.** (1989). *Libro Blanco de la Reforma Educativa.* Madrid.
- **Romberg, T. & Carpenter, T.** (1986). Research on teaching and learning Mathematics: Two disciplines of scientific inquiry. En M.C. Wittrock (Ed.). *Handbook of research and teaching.* (3rd ed., pp. 850-873). New York: Macmillan.

Taller: Construcción de ítemes de desarrollo

Thais Castillo Alfaro. Universidad de Costa Rica

Este taller reúne la experiencia del trabajo realizado como asesora de matemática y de evaluación, en el Ministerio de Educación Pública, con los profesores de Matemática en el diseño de exámenes.

Surge por la necesidad sentida en el aula de parte de alumnos y padres de familia en cuanto a los resultados que se obtienen en los procesos de evaluación y, por el reconocimiento de los docentes de secundaria de las debilidades que poseen en el campo de la elaboración de instrumentos, de lápiz y papel, para evaluar los aprendizajes.

Posee como supuesto teórico de que los instrumentos deben estar construidos de tal forma que no sean ellos mismos los que influyen en los resultados de los aprendizajes. También, en que es el alumno el protagonista de su aprendizaje, por lo que lo que debe ser evaluado es cuanto se ha aprendido a aprender (Arrién et al, 1996(, y donde son tan importantes los resultados como los procesos de aprendizaje.

El modelo que proponemos para este taller es producto de la teoría aplicada, esto es, de la experiencia adquirida en el desempeño de la docencia en la Educación Secundaria, y se ofrece como una base de diálogo, análisis y trabajo para compartir con los colegas asistentes.

Justificación: La Declaración Mundial sobre Educación para Todos, dan al sujeto educativo y a sus aprendizajes, el lugar protagónico del proceso educativo. Esto significa, que el alumno es responsable de su aprendizaje, y el docente actúa como un incentivador y orientador de las capacidades del individuo. Ambos *"educador y estudiante constituyen una unidad pedagógica creativa"*. Los medios que se utilizan en esa relación creativa, deben ser considerados como una instrumentalidad reflexiva, crítica y creativa. En esta perspectiva, son tan o mas importante que los resultados, los procesos de aprendizaje. (Arrién y otros, 1996).

La importancia de los aprendizajes está en la capacidad por aprender y en la pertinencia y relevancia de esos aprendizajes, para lo que se requiere del desarrollo de actividades educativas teórico-prácticas, en las que se use un lenguaje sencillo y comunicativo.

En esta posición la evaluación esta determinada por el ritmo y forma del aprendizaje del sujeto, para lo que surgen interrogantes:

- ¿qué evaluar del aprendizaje, su pertinencia y su relevancia?
- ¿cómo evaluar el aprendizaje?
- ¿cuándo evaluar el aprendizaje?.

Las respuestas deben considerar que lo importante es comprobar ***lo que se ha aprendido para seguir aprendiendo,*** y la utilidad de lo aprendido para el desarrollo personal y social.

Kolb, D. 1977, destaca el rol que juega la experiencia en el proceso de aprendizaje, y lo concibe como un ciclo donde la experiencia concreta inmediata, es la base de la observación y la reflexión. Las observaciones se asimilan a una teoría de la que se pueden deducir nuevas situaciones para su aplicación. Las capacidades que necesita el que aprende son:

- capacidad de experiencias concretas (EC),
- observación reflexiva (OR),
- conceptualización abstracta (CA) y
- experimentación activa (EA).

Estos ciclos facilitan la posibilidad de involucrase en experiencias nuevas, reflexionar sobre ellas, crear conceptos e integrar sus observaciones en teorías lógicamente sólidas para emplearlas en la solución de problemas y en la toma de decisiones.

Vygotsky señala que el conocimiento es social y se construye a partir de esfuerzos cooperativos por aprender, comprender y resolver problemas, dentro de la teoría cognitiva.

Al fortalecer el trabajo cooperativo en pequeños grupos y fomentar la interacción, donde se brindan ayuda, asistencia mutua e intercambio de recursos, se logra el razonamiento de cada participante y el discernimiento de los problemas propuestos.

Todo lo anterior, propicia responsabilidad individual, para lo cual se debe evaluar el aprovechamiento de cada individuo y devolver resultados tanto a la persona como al grupo, esto permite ***identificar no solo logros comunes sino quien necesita ayuda.***

La evaluación se debe hacer en forma individual por escrito y también en forma oral, solicitando a alguno de los participantes a exponer lo realizado por el grupo, observar el aporte de cada integrante del grupo y anotar la observación, proponer la coevaluación y solicitar a cada alumno que explique a otro lo aprendido. Debe darse el conocimiento entre los participantes y un ambiente de confianza con una comunicación clara y directa, ayudarse mutuamente y resolver conflictos de manera constructiva (Johnson 1991 a 1993; Johnson y F. Johnson 1994 en Johnson D. Johnson R. J. Johnson H, E. 1995).

La evaluación de los aprendizajes, implica una propuesta de ejercicios, actividades, preguntas, proyectos relacionados con los temas, en nuestro caso de matemática, que puedan ser objeto de observación, diálogo y revisión tanto de procesos como de resultados, con el fin de determinar lo que realmente saben y pueden hacer los alumnos.

Algunas pautas para el diseño de la evaluación, (Kilpatrick, 1995):

- Moverse más allá de las jerarquías de las habilidades básicas.
- Ubicar los ejercicios dentro de un contexto.
- Concebir la evaluación como un proceso de comunicación.
- Establecer correspondencia entre la evaluación y el curriculum.

- Asegurar que las pruebas miden lo que es valioso.

Los instrumentos de evaluación: Si se trabaja dentro de un u otra teoría de los aprendizajes, los instrumentos que se utilicen para realizar la evaluación de los mismos, deben ser de tal forma que no se constituyan en distorsionantes de los resultados o en una dificultad en sí mismos para quienes deben de responderlos.

Al diseñar estos instrumentos, es necesario considerar lo que se desea evaluar, que incluye tanto en el contenido como los niveles de dificultad con que se realizaron las diversas actividades de aprendizaje; el tiempo disponible para responderlos, el tipo de preguntas por utilizar que se constituyen en las diferentes **partes del instrumento**. Cada una de las partes debe consignarse con sus respectivas instrucciones y el puntaje asignado para su valoración.

El instrumento de evaluación de los aprendizajes debe concebirse con integralidad y claridad, esto es, ser identificado en cuanto a: la institución, el nivel al que va dirigido, el total de puntos que posee así como la ponderación correspondiente, el tiempo total disponible para su respuesta, las indicaciones generales que faciliten su abordaje. Esta parte constituye el ***encabezado.***

Los instrumentos son tan variados como la creatividad misma del proceso metodológico con que se desarrolla la temática, sin embargo, la dificultad que enfrenta el docente de matemática y la queja escuchada en los alumnos se relaciona en mayor grado con la forma de redactar y valorar las pruebas con preguntas de respuesta abierta que involucran el desarrollo de procesos.

Los ítemes de desarrollo: La redacción o construcción de los ítemes de respuesta abierta (desarrollo), debe considerar aspectos generales como la metodología utilizada, la temática objeto de evaluación, los diferentes procesos que se promovieron para facilitar el aprendizaje que determinan el nivel de dificultad con que se desarrolla la temática, el lenguaje conque se hizo referencia a esa temática, la forma en que se propusieron los ejemplos y ejercicios, así como la indicación ofrecida para su ejecución y el contexto en que se trabajó cada uno de ellos.

En matemática debemos considerar una particularidad en la redacción de cada ítem, cual es el hecho de que involucra la dificultad por la comprensión del vocabulario cotidiano y el vocabulario propio de la disciplina.

Objetivos.

- Ofrecer la oportunidad de explicitar en forma individual y de compartir, las experiencias respecto a la redacción de ítemes de desarrollo.
- Proponer un modelo teórico que permita analizar los ítemes y confrontar la práctica docente.
- Construir ítemes de desarrollo con calidad y características de validez.

Metodología: Se trata de analizar las deficiencias que ofrecen las preguntas de desarrollo que se utilizan en las pruebas en el nivel secundario y que cada participante al taller construya ítemes de desarrollo acerca de algún tema propio de este nivel, utilizando el modelo propuesto.

Las actividades se ejecutarán a nivel individual y en pequeños grupos, según la dinámica misma de las diversas actividades.

Actividades: Las actividades que se propician llevan una lógica en el proceso de revisión y análisis de los ítemes, que facilite el trabajo a cada docente, para autoevaluar su creación a la vez que se supera en el diseño de los mismo.

1. **¿Por qué escogí este taller?**

   Se reflexiona y expresa la importancia que le concede a la evaluación de los aprendizajes y a los instrumentos utilizados para su valoración.

2. **¿Qué características debe poseer un ítem de desarrollo?**

   Aquí se expresa la forma en que cada uno concibe las característica que debe poseer un ítem de desarrollo.

3. **¿Qué elementos ofrece el modelo de diseño?**

   Se presentan las características que debe poseer un ítem de desarrollo.

4. **¿Qué errores se observan en los ítemes?**

   Durante esta actividad se analizan los ítemes propuestos a la luz del modelo propuesto.

5. **¿Cómo hacer ítemes de calidad?**

   Se construirán ítemes de respuesta abierta, para la evaluación de un tema previamente seleccionado.

6. **¿Cómo validamos los ítemes?**

   Se procederá a realizar una validación de los ítemes redactados, entre colegas.

7. **¿Qué nos ha parecido el taller?**

   La actividad corresponde a la valoración del taller en sí, escuchando las sugerencias.

Modelo propuesto: Una de las condiciones básicas por considerar lo es la totalidad de los contenidos y procesos o comportamientos que serán objeto de la evaluación, para lo que se debe ir anotando en cada ocasión lo desarrollado durante los encuentros de aprendizaje.

Las sugerencias para la construcción de ítemes de desarrollo son:

- ***Defina claramente sus objetivos:***

  ¿Para qué esta evaluación?

  ¿Qué deben saber los alumnos?

  ¿Qué refleja acerca de cada estudiante?

- ***Redacte sus ítemes:***

  ¿Que vocabulario se utilizó?

  ¿Que conocimientos previos requiere el ejercicio?

¿Cuál es el nivel o niveles de dificultad que incluye el ítem?
¿Cuáles instrucciones debe llevar para su fácil comprensión?
¿Requiere se sugerencias para su ejecución?
¿Qué valor tendrá el proceso, el producto?
¿Qué puntaje se asigna a cada ítem?

- ***Desarrolle sus respuestas:***

  ¿Que tipo de respuestas pueden darse?
  ¿Qué dificultades se pueden presentar al desarrollarlo?
  ¿Cuáles ajustes haría luego de la aplicación?

- ***Valide los ítemes:***

Esta validación consiste en someter los ítemes a revisión y crítica de algún colega de la disciplina, o de algún especialista en evaluaciones de la misma institución, previa a la aplicación.

Analice las observaciones y decida si hace los ajustes.

En resumen. Un ítem debe:

- Contar con instrucciones precisas acerca de lo que se espera desarrollo quien ejecuta el ejercicio.
- Redactarse en forma clara el enunciado y con vocabulario conocido.
- Considerar los conocimientos previos requeridos para su desarrollo.
- Ponderar las dificultades que representa para quien lo ejecutará.
- Proveer el tiempo para su ejecución.

LAS INTERACCIONES SOCIALES EN EL AULA: SU IMPACTO EN EL APRENDIZAJE DE MATEMÁTICA

Niurka Ramos Rodríguez
Universidad Simón Bolívar - Sede del Litoral, Venezuela

Resumen: En el trabajo se reportan los resultados de una investigación donde se analizaron los efectos de la colaboración, el trabajo entre pares y la cooperación sobre los resultados del aprendizaje dentro del aula. En el estudio se desarrolló con cursos de Matemática de primer año universitario. Se combinaron análisis cuantitativos y cualitativos dentro de diseños cuasi-experimentales, con aplicaciones de diversas modalidades de estrategias metodológicas que fomentaban el trabajo cooperativo. Los resultados más importantes son: a) La cooperación y la interacción entre pares facilita la adquisición de conocimientos, genera un ambiente agradable en el aula y se incrementa la motivación dentro del grupo, b) El trabajo cooperativo es estimulado si la estrategia metodológica incorpora materiales instruccionales que guíen el aprendizaje, c) La estrategia metodológica debe permitir la libertad de afiliación dentro del aula, incluyendo respetar al estudiante que prefiera trabajar en forma individual.

Antecedentes: Las bases de la concepción interaccionista del aprendizaje se encuentran en los postulados teóricos de Vigotsky, quien propone una visión de la formación de las funciones intelectuales superiores considerando al hombre como "...un sujeto social que no sólo es activo sino, ante todo, interactivo". (Castorina, J. y otros, 1996)

En su investigación, Vásquez y Martínez (1996), constataron que en situaciones naturales un niño no actúa sino que intractúa con otros niños y que, en circunstancias, cuando un niño parece actuar sólo, siempre está consciente de la presencia de los otros (ya sean adultos o niños). Ellas denominan a las interacciones entre pares como *horizontales* y consideran que el proceso de adquisición de conocimientos se construye a través de intercambios sucesivos con el entorno social, de tal manera que nada impide que los pares puedan contribuir al aprendizaje de otros.

Coll Salvador (1991) menciona que dentro de una clase hay tres formas básicas de organización social: cooperativa, competitiva e individualista y que los hallazgos empíricos evidencian que las organizaciones cooperativas favorecen el incremento del rendimiento académico.

Por otra parte, Perret-Clermont (1984) plantea que es conveniente abandonar el sistema clásico de relación maestro y alumno para fomentar una red de interacciones entre los alumnos. Esta comunicación entre pares de aprendices favorecen la construcción del conocimiento y el progreso intelectual de cada participante. En el mismo orden de ideas, Cechini y Tonucci, (citados por Perret-Clermont (1984) plantean que el rendimiento de todos los alumnos pueden ser mejorado si se promueve un método de enseñanza fundamentado: en la construcción del conocimiento, en la motivación intrínseca con respecto al trabajo escolar y en la intensificación de la comunicación y de las interacciones entre los alumnos.

Tomando en cuenta los aportes de los diferentes autores, se puede inferir que las estrategias de enseñanza-aprendizaje están estrechamente relacionada con los tipos de interacción que se generan en el aula. Por ejemplo, una clase expositiva fomenta el individualismo de los miembros de la clase y el trabajo en pequeños grupos puede estimular el trabajo cooperativo intragrupo pero puede despertar competencia intergrupos. El objetivo es, entonces, encontrar una estrategia que fomente el progreso cognitivo de los aprendices mediante un trabajo cooperativo, creador, basado en las interacciones alumno-alumno.

Dos hechos que resaltan durante los procesos interactivos son la generación de conflictos socio-cognitivos y la aparición del alumno tutor. El primero consiste en la confrontación de puntos de vista moderadamente divergentes, en relación a una misma situación o tarea, exigida por la actividad grupal común, lo cual moviliza y potencia las reestructuraciones intelectuales de cada participante, generándose así un desarrollo y crecimiento cognitivo-intelectual. El segundo se refiere, a que algunos estudiantes más preparados tienen la disposición de ayudar a sus compañeros, esto les impone un proceso de reflexión ante el reto y la necesidad planteada por el otro que le obliga a organizar y a fundamentar la explicación solicitada. (Elises Simón y Del Caño Sánchez, 1992, Perret-Clermont, 1984; Coll Salvador, 1991).

En cuanto a investigaciones previas, Webb (1982a, 1982,b) encontró que con el trabajo cooperativo en pequeños grupos en el área de Matemática, la interacción entre los estudiantes estaba estrechamente relacionada con los niveles de logro alcanzados.

La investigación aquí planteada estudió los efectos de las interacciones entre los alumnos sobre su rendimiento académico. Para ello se compararon los rendimientos reportados por los estudiantes cuando se variaba la estrategia metodológica aplicada. La diferencia entre las estrategias metodológicas estaba dado por el grado de actividades que fomentaba la interacción social entre los miembros de la clase.

Metodología: Esta investigación se desarrollo durante dos años, con sucesivas aplicaciones de diferentes modalidades de estrategias metodológicas en cursos de Matemática de primer año universitario, a través de diseños cuasi-experimentales y donde se comparaba cuantitativamente y cualitativamente los resultados en cada aplicación. La metodología se apoyó mucho en técnicas de origen etnográfico, ya que no se trataba de medir *interacciones sociales* sino observarlas y comparadas con el rendimiento.

Tratamientos: La variabilidad de los tratamientos estaban caracterizado por los siguientes elementos:

- *Nivel de participación del docente*: Se variaba el grado de intervención del docente en los procesos instruccionales dentro del aula.
- *Nivel de participación de los alumnos*: Se establecían diferentes pautas de participación en las actividades de aprendizaje.

- *Organización de la clase*: Se modificaba la organización dentro del aula con libertad para organizarse o expresamente se establecía la organización de pequeños grupos cooperativos.
- *Materiales instruccionales*: Se suministraba materiales para guiar el aprendizaje en diferentes grados y cantidades.

Instrumentos: Los instrumentos utilizados fueron los siguientes,

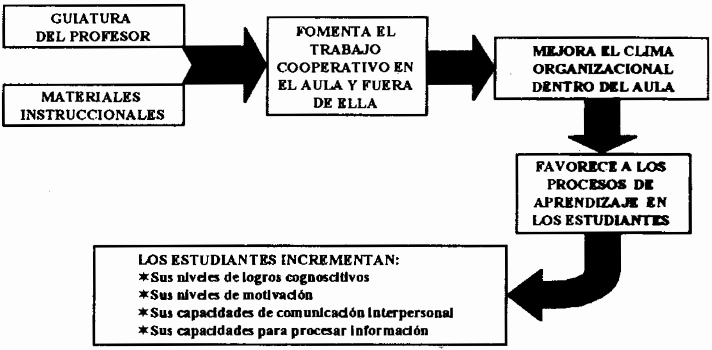
Pruebas del conocimiento: Preparadas para medir los conocimientos adquiridos y sometidas a un proceso de validación y de cálculo de confiabilidad, obteniéndose valores aceptables (α>0.79) para pruebas no estandarizadas preparadas por el investigador.

Registro de observaciones: Durante los procesos instruccionales se hicieron anotaciones para llevar los registros de aquellos aspectos que podían ser de interés para la investigación y que permitieran elaborar algunas categorías de comparación para análisis posteriores. Entre ellas se pueden mencionar: niveles de atención, interés y participación, formación de grupos, interacciones, manifestaciones verbales y corporales, necesidad de atenciones individuales, entre otras.

Cintas grabadas: Al final de cada curso se procedía a hacer entrevistas grupales e individuales sobre los procesos desarrollados en el aula. Los estudiantes opinaban con libertad acerca de todo lo positivo y negativo de cada curso y la información era enriquecedora.

Discusión de los resultados: De los resultados más importante cabe mencionar los siguientes: a) El trabajo cooperativo en el aula facilita la adquisición de conocimientos, el desarrollo psico-intelectual de los aprendices, lo cual coincide con los planteamientos de Perret-Clermont y Vásquez y Martínez. Además, se genera un ambiente de aprendizaje agradable dentro del aula y aumenta la motivación dentro del grupo. b) Uno de los elementos clave que fomentó la actividad cooperativa fue la asignación de materiales instruccionales que guiaban el aprendizaje, los estudiantes sentían que disponer de dichos materiales les facilitaba la comunicación con sus compañeros ya que se equiparaban las metas a cumplir, los procesos a desarrollar y se identificaban las deficiencias individuales. c) Las modalidades metodológicas más efectivas son aquellas que dan libertad de afiliación y de organización dentro del aula de clase y d) En casi todos los cursos surgían uno o más estudiantes, que asumían el rol de líderes en los procesos de aula, ayudando a sus compañeros a procesar la información por aprender. Esto coincide con los planteamientos de Elises Simón y del Caño Sánchez con relación a la aparición del estudiante tutor

A modo de conclusión: Seguidamente se presenta un gráfico que trata de ilustrar lo más importante derivado de este estudio. La actividad facilitadora del profesor y los materiales instruccionales fomentaron el trabajo cooperativo, dentro y fuera del aula. Esto a su vez mejoraba el clima afectivo dentro del aula, generando un ambiente propicio para el aprendizaje. Los productos de la interacción son de índole cognoscitiva y afectiva.



Referencias Bibliográficas:

- **Castorina, J. y otros** (1996). *Piaget-Vigotsky: contribuciones para replantear el debate*. Buenos Aires: Editorial Paidós
- **Coll, S.**. (1991). *Aprendizaje Escolar y Construcción del Conocimiento*: Barcelona (España): Editorial Paidós.
- **Elises, S. y del Caño, M.** (1992). Interacción, Habilidad Previa y Proceso Cognitivo. *Anuario de Investigación en la Educación Española*. Madrid: Ed. CEPE
- **Perret-Clermont, A**. (1984). *La Construcción de la Inteligencia en la Interacción Social*. Madrid: Visor Libros.

Propuesta para orientar a los estudiantes en su estudio personal de las matemáticas

Ana Mondrus Ostroumón
Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

En este trabajo se presentan puntos clave para orientar a los estudiantes, que, al no ser abordados obstaculizan el aprendizaje significativo de las matemáticas. Esto redunda en que muchos estudiantes no disfrutan de su estudio y pierden confianza en sí mismos al "no entender" conceptos o procedimientos. Dentro de estos puntos clave no se están considerando factores contextuales o hábitos generales de estudio. Los estudiantes a que se alude son de cursos iniciales universitarios o finales de enseñanza media.

Puede decirse que un conocimiento ha sido "aprendido" cuando el estudiante ha hecho una elaboración o construcción personal de ese conocimiento que le permita la autonomía necesaria para transferirlo a una situación diferente de aquella en la que le fue presentado, por la vía de relacionarlo con conocimientos previos e incorporarlo a ellos.

Se observa en los estudiantes de cursos iniciales universitarios, dificultades para realizar esta transferencia, al tratar de resolver un problema, hacer operaciones algebraicas, pasar del registro gráfico al algebraico y viceversa, etc. Esto refleja que el conocimiento en cuestión no se asimiló adecuadamente.

Muchas investigaciones y propuestas se han orientado hacia un cambio en los procesos de enseñanza para que el estudiante llegue a ser sujeto de su aprendizaje, lo que conlleva el desarrollo de su confianza en sí mismo. Dentro de esta línea conviene orientar al estudiante para que en su estudio personal -imprescindible sea cual sea el criterio epistemológico subyacente o las metodologías usadas en el aula- distinga las características específicas del discurso y de los procesos matemáticos. Pues si bien los hábitos de estudio son los mismos para cualquier asignatura, el pensamiento matemáticos y las técnicas para estudiar las matemáticas le son propias y están asociadas a las características antedichas, que básicamente pueden resumirse en:

1. un idioma diferente, con sus símbolos, su estructura gramatical y su lógica inherente, distintos al lenguaje corriente, no familiares a los estudiantes.
2. una excepcional concatenación interna, que hace imprescindible dominar tanto las componentes básicas comunes a muchas nociones domo aquellos conocimientos que son previos a otros.
3. un conjunto de abstracciones sucesivas, que es fuente de numerosas dificultades.
4. uso de estructuras lógicas y del método deductivo.

En el marco de lo anterior, se plantean tres hipótesis que han sido formalmente verificadas sobre la base de experiencias en el aula o en la consulta, planteadas como investigaciones no formalizadas de tipo cualitativo (empírico/experimental). Sus resultados han sido cambios declarados por muchos estudiantes con respecto a su percepción de las matemáticas y la calidad de su aprendizaje.

Estas hipótesis son:

1. Un factor importante de las dificultades asociadas con bases insuficientes o achacadas a la falta de capacidad del alumno o alumna, es el desconocimiento de las características inherentes a las matemáticas referidas anteriormente, que hacen diferentes y específicas las técnicas para estudiarlas.
2. La cantidad de tiempo necesario para asimilar conocimientos matemáticos es mayor de lo previsto por la mayoría de los estudiantes. Si el estudiante logra salvar la valla de lo ajeno y extraño de las matemáticas, se sentirá más motivado para dedicarle tiempo, lo que redundará en una mejoría tanto de la calidad como de la cantidad de su estudio. Además en algunos casos la frustración de estudiantes que, pese a dedicar tiempo a su estudio, no logran aprenderlas
3. Es importante que el estudiante sepa "como se piensa" en matemáticas, además de conocer los contenidos matemáticos, generalmente entregados como algo acabado y que llega a creer que debe aplicar mecánicamente. Esto le permitirá confiar en su propio pensamiento, paso previo a cualquier intento de estudiar algo.

A continuación se desarrollan algunas recomendaciones a partir de los puntos clave, e hipótesis anteriores.

1. **Enseñar a leer matemáticas**: una queja frecuente es que los estudiantes "no estudian la teoría", o no leen los libros de texto. Se plantea aquí como un paso importante el enseñar a leer el discurso matemático. Considerando que aprender matemáticas es aprender algo en otro idioma, debe verificarse el dominio de ese idioma; con respecto a sus reglas, símbolos, lógico involucrada, notoriamente diferente del lenguaje corriente. Por ejemplo, en un enunciado matemático (teorema, proposición, fórmula, etc.), por definición conciso y preciso, la técnica de lectura no es separar la idea principal de las ideas secundarias; más bien en la lectura matemática una recomendación sería leer "sin perder detalle y sin perderse en los detalles". Es habitual que la primera vez que se lee un enunciado matemático, no se capte. Que el estudiante sea consciente de esto y no se inhiba porque no entiende, es conveniente, ya que esto le dará confianza para una segunda lectura, donde deberá ubicar las palabras claves y determinar lo que conoce y lo que desconoce, actuando oportunamente en el último caso mediante revisión de temas previos, orientándose con ejemplos, etc. También debe guiársele para desentrañar el significado de un aparente trabalenguas que parecen ser algunos párrafos matemáticos. De ahí que recién la tercera lectura es la "lectura matemática" del enunciado; lo dicho anteriormente vale también para lectura de enunciados de problemas. Ya desde este primer punto se hace visible la necesidad de

dedicar un tiempo mayor a un mismo número de páginas de matemáticas que de otra asignatura, dada la naturaleza densa, sintética y lógica del discurso matemático. Aunque pueda parecer evidente, una gran mayoría de estudiantes no está convencida de esta necesidad, primordial para el éxito del estudio personal.

2. **Construir el concepto de variable muda**: mención aparte merece, la característica exclusiva del lenguaje matemático de la representación y, estrechamente ligado con ella, el del proceso de sustitución. El no reconocer las características anteriores es fuente frecuente de errores al desarrollar ejercicios o de una inhibición en el razonamiento. Por ejemplo, al definir valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

debería hacerse transparente a los estudiantes que la x está <u>representado</u> ya sea un número como tal o una expresión algebraica... que puede involucra aún a la letra x. Es decir, la construcción del concepto de "variable muda" no parece ser previo a esta definición. En experimentos en aula al pedir completar $|-x+3| = \{ \ldots$ después de haber aclarado que "$-x+3$" está en vez de la x, algunos estudiantes contestaron

$$|-x+3| = \begin{cases} -x+3 \text{ si } x \geq 0 \\ x-3 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

mostrando un avance en la comprensión de la representación, pero sin vincularlo adecuadamente con otra componente básica: la implicación subyacente que pareciera no ser tomada en cuenta. Después de una discusión en la clase, se logró que todos entendieran el sentido de la representación (al menos en el caso concreto del experimento).

Otro ejemplo frecuente aparece en la dependencia funcional, así, en cálculo, al definir la derivada, para muchos $f(x+\Delta x)$ no es interpretado como la sustitución de $f(x)$ de x por $x+\Delta x$ cuando se pide calcular la derivada para una función particular. Para este caso resultó adecuado utilizar la "secuencia de aprendizaje" siguiente: preguntar a quien escribió mal o no entendió el significado de $f(x+\Delta x)$; (idealmente en forma oral, y no en símbolos): $f(2) = ?$, $f(7) = ?$, $f(-2) = ?$, $f(a) = ?$, $f(x+\Delta x) = ?$ y se hizo manifiesto que ya el estudiante captó la representación en ese caso, después de haber respondido acertadamente las cuatro primeras preguntas.

Y así podrían darse otros ejemplos, como aplicar alguna fórmula memorizada con letras a situaciones en las que en vez de letras haya expresiones algebraicas complejas. Pareciera que el hecho de la representación (sustitución, idea de "variable muda"), se explícita, aclara o enfatiza en muy pocas ocasiones, pese a no ser intuitivo y ser fuente de muchas dificultades. Por se la sustitución uno de los procedimientos más importantes y frecuentes en matemáticas, el estudiante debe capacitarse para reconocerla o aplicarla cuando sea necesario, en particular en su estudio personal.

3. **Vincular la teoría y la práctica**: se observa que muchos estudiantes no reconocen el vínculo entre un enunciado teórico (definición, enunciado de teorema, etc.) y un ejemplo en el cual las variables se hayan sustituido por números u otras expresiones. Aquí es importante asociar a lo planteado en los puntos (1) y (2) la recomendación de no separar el estudio de la teoría de los ejemplos ilustrativos ni de la práctica de ejercicios, pues debe conocer el estudiante la retroalimentación que se dan mutuamente la teoría y la práctica.
4. **Rescatar y acotar la memorización**: resaltar tanto la <u>necesidad</u> como la <u>no suficiencia</u> de la memorización (de teoremas, definiciones, reglas generales, etc.), sin descuidar una ni la otra: es tan imposible aprender algo si no hay nada memorizado con lo cual relacionarlo, como inútil sólo repetir mecánicamente enunciados o procedimientos sin la comprensión que permita relacionarlos con otros y asimilarlos.

A partir de lo anterior, pueden recomendarse algunas técnicas, como las siguientes:

1) Revertir igualdades o procedimientos como un recurso para comprenderlos, así, por ejemplo, sugerir que un producto notable como $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ sea también memorizado en la forma $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$. Aunque matemáticamente no hay diferencia, epistemológicamente si, pues se está asociando de inmediato el desarrollo de un producto con la factorización.
2) Además de desarrollar un ejercicio tal como se pide, se varíen sus características, por ejemplo, cambiando el signo de los números, generalizando números a letras, letras a expresiones, etc. Esto, aún en la práctica rutinaria. Para esto el profesor puede proveer "secuencias de aprendizaje", que busquen llevar al estudiante por esos cambios, después puede inventarlas el mismo estudiante. Un ejemplo sería: "Resuelva las siguientes ecuaciones: $x+3=5$; $|x+3|=5$; $|-x-3|=5$; $|-x+3|=5$; $|-x+3|=0$; $|-x+3|=-5$". Por supuesto aquí el objetivo no es que el estudiante simplemente responda a cada ejercicio, sino que contraste sus respuestas, saque conclusiones, plantee preguntas y discuta los resultados relacionándolos con sus conocimientos previos.
3) Practicar el reconocimiento de las estructuras lógicas por parte del estudiante, por ejemplo de las proposiciones del tipo si... entonces y en general de la lógica involucrada sea en los teoremas o en ejercicios con condiciones (ej: desigualdades) y de los cuantificadores tácitos. Por ejemplo $/a+3/$ ¿es igual o distinto de $a+3$? si un estudiante responde "igual" es incorrecto, pero la corrección de la respuesta "distinto" está basada en el subentendido de que a es <u>cualquier</u> número real. Generalmente los libros no explicitan esto, y entonces $/a+3/$ sí es igual

a $a+3$ para los $a \geq -3$. A veces los subentendidos son por un abuso de lenguaje excesivo, por ejemplo en algunos textos de cálculo hay descripciones de funciones así:

$$f(x)=\begin{cases} x+5, & x<2 \\ x^2+3, & x \geq 0 \end{cases}$$

¡y en ningún lugar se dice que la coma debe leerse "si"!

lo cual aumenta la dificultad que ya tiene el estudiante con las implicaciones lógicas.

Lo anterior es una lista no exhaustiva de aspecto que conviene hacer explícitos al estudiante para capacitarlo en su estudio personal. Puede mencionarse otros no menos importantes, como la capacitación en particularización y generalización o en aprender a distinguir una práctica rutinaria de una formativa, dedicando tiempo a ambas.

Referencias Bibliográficas:

- **Méndez, Z.** (1995). *Aprendizaje y Cognición*. Euned, Costa Rica.
- **Tallizina, F.** (1992). *Los fundamentos de la enseñanza en la educación superior*. Conferencias. Univ. Autónoma Metropolitana, México.
- **Torres, A.; Villegas, A.; Fernández, L.** (1995). *Manual de hábitos y técnicas de estudio*, Vols I y II, Euned, Costa Rica.

Impacto del c.p.u.[1] en las concepciones previas de los estudiantes respecto de los temas de física, biología y matemática

Hugo Tricárico (Director del Proyecto) José Villella (Coordinador General) Antonio Gutierrez (Asesor metodológico) Universidad Nacional de San Martín Argentina

Objetivos:

- Caracterizar las concepciones que los alumnos del C.P.U. tienen respecto de los temas a trabajar en las materias referidas a la Física, la Biología y la Matemática
- Inferir relaciones entre los programas de estudio vigentes en las escuelas de origen de los ingresantes y los temas a abordar propuestos por las distintas cátedras del C.P.U.
- Determinar causales de éxito y fracaso de los estudiantes en las diferentes instancias evaluadoras que deben cumplimentar durante el C.P.U.
- Comparar las ideas previas que los estudiantes tienen respecto de temas básicos de Física, Biología y Matemática con los conceptos con los cuales culminan su C.P.U.
- Medir el impacto que el C.P.U. tiene sobre las concepciones previas de los alumnos respecto de los temas básicos de las ciencias a estudiar
- Determinar el grado de importancia del C.P.U. para las distintas carreras de la Universidad
- Evaluar la pertinencia de la organización curricular y administrativa del C.P.U. respecto de sus objetivos creacionales.

Importancia de la investigación: El C.P.U. es una instancia académica obligatoria propuesta a los alumnos ingresantes a las distintas carreras que ofrece la Universidad Nacional de General San Martín. El análisis de sus objetivos de creación así como también el contenido de los programas de estudio que pretende desarrollar, su relación directa o indirecta con el grado de formación académica del ingresante a dicha casa de Estudio, se constituyen en variables de análisis a tomar en consideración en la organización futura del mismo.

Tanto Directores de Departamento como Profesores que en él actúan deberían conocer elementos fehacientes de análisis de sus resultados, ventajas y desventajas de los métodos de trabajo así como herramientas para modificar lo que no sea correcto o reforzar lo que marca el logro de los objetivos.

Diseño de trabajo: El siguiente es el bosquejo de enunciación de los capítulos que en términos de grandes temas dan el contenido a la investigación:

1- Las concepciones previas de los alumnos

[1] Se denomina así al Curso Pre- Universitario que los alumnos ingresantes a las distintas carreras de la Universidad están obligados a cursar previo a su incorporación a la misma. Las materias que en él se cursan tienen relación con las de sus respectivas carreras.

1.1. lo que se cree saber y lo que se sabe acerca de la Física, Biología y Matemática al entrar al CPU

1.2. lo que se debería saber al entrar el CPU sobre Física, Biología y Matemática

2- Los objetivos del CPU

2.1. fines de su creación

2.2. contenidos a desarrollar

2.3. selección de personal a cargo

3- Los resultados del CPU

3.1. nivel de aprobación del CPU

3.2. causas del fracaso en el CPU

3.3. procedimientos remediales frente al fracaso y la deserción

4- La eficiencia del CPU

4.1. relación objetivos, resultados

4.2. propuesta de mejoramiento de la calidad del CPU.

Las distintas etapas del diseño antes mencionadas se trabajarán desde el método descriptivo.

Procedimiento de trabajo: A continuación se detallan las actividades que se cumplirán para el logro de las etapas que constituyen el trabajo.

1- Recolección de datos sobre las concepciones previas de los alumnos respecto de los contenidos de las materias del CPU .

Recolección de los diagnósticos de los alumnos por parte de los profesores del CPU

2- Análisis de documentos relacionados al CPU

3- Recolección de datos sobre escuelas de origen de los alumnos entre 1993-1996

4- Recolección de datos sobre resultados parciales y finales de los alumnos por materia relacionadas con las Ciencias a estudiar entre 1993-1996

5- Análisis de programas analíticos de las materias del CPU. relacionadas con las Ciencias de base

6- Análisis de los programas analíticos de las materias de formación de la Escuela Secundaria relacionadas a las Ciencias de Base

7- Análisis de los contenidos de EGB y Polimodal relacionados con las Ciencias de Base

8- Análisis formal y cualitativo de los exámenes parciales y finales de las materias del CPU entre 1993-1996.

9- Tabulación e interpretación de resultados

10- Presentación de conclusiones y propuesta.

Para las actividades previstas se invitará a formar parte de la investigación a los alumnos de la Licenciatura (profesores de enseñanza media en las disciplinas estudiadas) que quieran compartir el proyecto.

Estado actual de la investigación: Al momento - marzo de 1997- sólo se ha desarrollado la actividad 1 y se están conformando los equipos de trabajo para las actividades 2 a 5. El siguiente es el informe correspondiente a la evaluación diagnóstica del área de matemática administrada a los ingresantes de 1997. En la redacción de los resultados se han intercalado alguno de los items de dicha evaluación. [2]

Población sujeto de la evaluación: 508 aspirantes al C.P.U. de la Universidad

Elaboración de items y corrección: 12 profesores alumnos de la Licenciatura[3]

Metodología de trabajo: El instrumento se diseñó tomando en consideración los contenidos que los alumnos deben conocer al terminar cuarto año de la actual escuela media argentina, en el área de matemática.Se listaron los contenidos, se priorizaron aquellos que tienen mayores relaciones con los temas propuestos para el trabajo del C.P.U. y se redactaron los items.

En la redacción se tuvo en cuenta que:

- en algunos de ellos la misma sea del tipo "redacción escolar"[4]
- la mayor parte de los items representen problemas para resolver y no ejercicios[5]
- los enunciados sean significativos para el alumno[6]
- la cantidad de items propuestos no sature la capacidad de lectura y/o resolución por parte del aspirante
- existan distintos tipos de formatos en las redacciones: cuestionario de preguntas abiertas, cerradas, selección múltiple...

[2] A efectos de este informe sólo se han presentado los resultados generales. Los mismo tiene relación con especificaciones realizadas por cada item y por cada alumno.

[3] Los profesores intervinientes fueron: Acevedo, V; Cicala, R; Di Blasi Regner, M; Gianmmateo, M; González, A; Illuzzi, A; Nieto, E; Peruelo, J; Pedrón, C; Rivas, In; Sara, A; Valiño, F.

[4] El equipo denominó así alos enunciados que aparecen con mayor recurrencia en los libros de textos y en las guías de actividades destinadas a los alumnos. Se incluyen en esta clase los enunciados que los alumnos reconocen rápidamente como matemáticos y les recuerdan algoritmos sencillos de resolución.

[5] Se toma como problema aquella situación para la cual la solución debe ser buscada y armada, no se poseen recursos inmediatos para solucionarla y representa un conflicto cognitivo para el lector. Se tomó por ejercicio aquel enunciado que sólo necesita de un algoritmo- fórmula, gráfico...- para su solución

[6] El concepto de significatividad se toma en el contexto planteado por Ausubel y sus seguidores

se de la posibilidad de horquillamiento entre las preguntas. Esto se logró con los items 8,11 y 13 que evalúan desde distintos aspectos el mismo contenido

Sobre esta base se construyó la tabla de especificación de competencias que se evaluaron en cada uno de los items, de los que se muestran algunos como ejemplos, a continuación:

Item 6: Sea $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ la fórmula de una función definida de Â®□, tal que: $p(2) = 0$

a. halle las raíces restantes.

b. responda: ¿cuántas veces el gráfico de p corta al eje x?

c. responda: ¿cuántas veces el gráfico de p corta al eje y?

Mediante el mismo se evaluó el dominio de los siguientes contenidos: raíces de polinomios: concepto, método de resolución. Concepto de función.

Item 8: Si a una cena con costo total fijo, hubieran asistido dos personas más, habrían pagado $20 menos el cubierto y si hubiesen asistido dos menos, se habría pagado $30 más por cubierto.

a. Elija de entre las opciones dadas, ¿cuál indica el número de asistentes y el precio por cubierto:

A) 8, $120 B) 8, $100 C) 10, $120 D) 12, $100 E) 10, $100 F) NINGUNA DE LAS ANTERIORES.

b. Muestre el procedimiento seguido.

Con el que se evaluó: Proporcionalidad, resolución de sist. de ecuaciones, traducción de lenguaje coloquial a simbólico. En este ítem se produce el horquillamiento con los dos siguientes:

Item 11: Dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales. Se sabe que para cierto valor m de A y para cierto valor t de B se cumple que, si se aumenta m en 30 unidades, t disminuye en 2; y que si se disminuye m en 20 unidades, t aumenta en 2.

a. Responda: ¿cuál de las siguientes opciones representa a la constante de proporcionalidad?

A) 1000 B) 960 C) 1200 D) 12 E) 800 F) NINGUNA DE LAS ANTERIORES.

b. justifique su elección

Item 13: Responda: ¿cuál de las opciones dadas es solución del sistema?

$x\,y = k$

$(x + 30)(y - 2) = k$

$(x - 20)(y + 2) =$

A) $y = 8$; $x = 100$; $k = 800$ B) $y = 8$; $x = 120$; $k = 960$ C) $y = 10$; $x = 100$; $k = 100$ D) $y = 12$; $x = 100$; $k = 1200$ E) $y = 10$; $x = 120$; $k = 1200$ F) NINGUNA DE LAS ANTERIORES

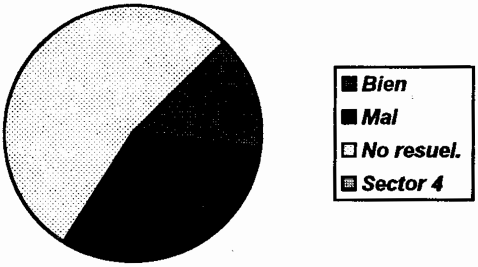
Con el ítem 14 se completó el estudio de los contenidos geométricos:

Item 14: Con una hoja de cartón de 15 cm. x 20 cm, se pretende construir en una sola pieza, un recipiente sin tapa con forma de prisma recto que será llenado con arena. Se quiere que la base tenga 9 cm. x 16 cm. y que la altura sea la mayor posible

a. Responda: ¿cuál es la mayor altura posible?

b. ¿porqué?

<u>Resultados alcanzados:</u> Los mismos se muestran en el siguiente gráfico:



Conclusiones: Sobre la base de los resultados alcanzados en cada uno de los items de la evaluación y en función de los procedimientos utilizados para su resolución, se recomendó a los docentes del CPU diseñar situaciones de enseñanza (Brousseau 1986; Artigue, 1995) que se centren en el campo de la resolución de problemas (Charnay, 1990) y utilicen los siguientes contenidos conceptuales y procedimentales (CBC, 1995): Funciones, Técnicas de recolección, organización e interprestación de datos, Uso del lenguaje simbólico, Elementos básicos del pensamiento geométrico, Uso de la calculadora: análisis de la pertinencia de los resultados.

La poca calidad del trabajo presentado por los alumnos, su alto grado de dependencia hacia lo algorítmico y su ineficaz uso de la metodología heurística, determinan la conveniencia, asimismo, del armado de un dispositivo de capacitación para los docentes de las escuelas de origen de los estudiantes, tendiente a remediar la situación descripta y a ofrecerles el espacio apropiado para la reflexión acerca de los saberes, los programas y las prácticas (Douady, 1996). Paralelamente a ello, la formulación de problemas en detrimento de largas listas de ejercicios en las guías de trabajo del CPU, hará que los alumnos puedan paulatinamente recobrar el gusto por hacer matemática y desarrollar las competencias que le serán requeridas para la resolución de situaciones significativas (Ausubel,1992) que es de esperar se le presenten a lo largo de sus estudios universitarios.

Referencias Bibliográficas:[7]

- Ausubel,W. (1992).- *Psicología evolutiva*- México, Trillas.
- Artigue,M. (1995).- *Ingeniería didáctica*- Bogotá- Iberoamericana.

[7] Se han consignado sólo las obras consultadas para el apartado de matemática.

Una alternativa para el aprendizaje de conceptos matemáticos: la instrucción heurística

Carmen Luisa Méndez Fabret.
Juan Raúl Delgado Rubí.
Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría" (ISPJAE) Cuba.

Introducción:

Una de las problemáticas a resolver en la enseñanza de las Matemáticas se relaciona con la adquisición de conceptos cuya asimilación resulta muy difícil para los estudiantes, pero la comprensión e interiorización de su contenido son ineludibles para el aprendizaje de otros que le suceden.

Un requerimiento para el tratamiento didáctico efectivo de tales conceptos es la selección de una adecuada estrategia pedagógica que permita satisfacer las exigencias para la construcción de los mismos.

En el presente trabajo se dan algunos fundamentos teóricos basados en enfoques de orientación heurística, tales como la Enseñanza Problémica y el Problem Solving, que explican cómo la definición o caracterización de un concepto pueden tener carácter de problemas. Esto permite utilizar explícitamente, desde la fase de introducción del nuevo conocimiento, recursos metacognitivos y heurísticos en su tratamiento didáctico metodológico, que propicien el aprendizaje activo y el adiestramiento necesario para el desarrollo de habilidades cognoscitivas de alto nivel y un entendimiento profundo del contenido.

Fundamentación teórica:

Varias de las dificultades relacionadas con la asimilación de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial, como es el caso de los conceptos de límite, continuidad y derivada, son el resultado de usar en la práctica educativa modelos de enseñanza que se caracterizan por: la presentación de los conceptos en forma abstracta, el papel del docente como mero transmisor de información, la exposición del contenido como un cuerpo terminado de conocimientos, la presentación de temas aislados unos de otros dentro de la disciplina y respecto a otras disciplinas, la resolución de problemas de palabra clave y ejercicios rutinarios, la memorización de datos, el dominio de destrezas algorítmicas y la evaluación del aprendizaje basada en medir primordialmente, las destrezas alcanzadas en la ejecución de procedimientos algorítmicos y la memorización mecánica de los conceptos.

Nuevos trabajos en el campo de la Educación Matemática dan luces acerca de las posibilidades reales de que este panorama pueda cambiarse totalmente. Entre ellos se destacan los trabajos de P. Torres (1993) y los de A. Schoenfeld (1985). Entre las premisas epistemológicas y psicológicas de estos trabajos está el considerar la Matemática como una disciplina dinámica y el concebir el aprendizaje como un proceso en el que el desempeño del alumno juega un papel protagónico.

Los presupuestos teóricos que dimanan de los trabajos antes citados **unido a** la concepción sistémica de la enseñanza de los conceptos **constituyen el** marco teórico de nuestro trabajo.

Organizar el proceso de forma tal que los alumnos sean situados sistemáticamente ante problemas, cuya resolución recabe de su participación activa, crea las condiciones para revelar al estudiante los diferentes recursos heurísticos que en cada caso utiliza al resolver problemas y hacerlos conscientes de las diversas relaciones y vínculos existentes entre los contenidos objeto de estudio.

Papel de la instrucción heurística en la formación de conceptos:

Cuando se habla de resolver un problema suele pensarse en resolver un problema de aplicación e incluso hasta de un problema netamente teórico, pero generalmente esto no se asocia con la introducción de un nuevo concepto.

L.M.Santos (1994), refiere, " *que el término problema no sólo se vincula con situaciones rutinarias o no rutinarias específicas donde el estudiante intenta encontrar solución o soluciones, sino que también incluye, el problema de aprender conceptos...*".

Por su parte S.Hernández (1991) plantea que "*cuando el aprendizaje de los alumnos se dirige con un enfoque problémico también se considera que la definición o caracterización de conceptos y la búsqueda de nuevas fórmulas, proposiciones y procedimientos, tienen el carácter de problemas en la enseñanza de la matemática" y por lo tanto "...encuentran aplicación entre otras las reglas heurísticas generales...*"

En nuestra opinión en el diseño de actividades de aprendizaje en un curso de cálculo con enfoque de orientación heurística, deben ser distinguidos tres momentos fundamentales, a saber: el momento de la introducción de los nuevos conocimientos, el momento de la consolidación y el momento de la aplicación.

En cada uno de estos momentos los problemas o situaciones problémicas a plantear difieren respecto a los objetivos que se persiguen, pero en general las técnicas con que pueden ser "atacados" son esencialmente iguales, es decir aquí la esencia radica en organizar el proceso de forma tal que los alumnos sean situados sistemáticamente ante problemas, cuya resolución recabe de su participación activa, creando las condiciones para revelar al estudiante los diferentes recursos heurísticos que en cada caso utiliza al resolver problemas, y haciéndolos conscientes sobre las diversas relaciones y vínculos existentes entre los contenidos objeto de estudio.

En este ambiente se dan las condiciones necesarias y suficientes para desarrollar la Instrucción Heurística (IH), es decir introducir de manera consciente, explícita y planificada aquellos principios, reglas y estrategias generales y especiales de la Heurística que sirven para la resolución de problemas (Méndez, 1995).

Tratamiento del concepto de limite con instrucción heurística:

El concepto de Límite es uno de los más difíciles de formar en el estudiante y a la vez es trascendental en el aprendizaje del Cálculo ya que otros conceptos como continuidad, derivada, integral y serie recurren a él, lo que justifica la importancia de cualquier esfuerzo que se realice en pos de lograr un aprendizaje eficiente del mismo.

La aplicación de la IH en el tratamiento metodológico del concepto de Límite de funciones requirió de un estudio integral del tema Límite y Continuidad que permitió observar los siguientes aspectos.

Su aprendizaje se concibe como el resultado de la impartición del contenido como un sistema de conocimientos estructurado en ocho actividades docentes donde se sustituye un anterior esquema de conferencias y clases prácticas muy rígido por otro más flexible, en el cual se pueden discutir y analizar con los estudiantes situaciones problémicas o problemas que involucran el concepto de límite y que reportan ventajas como la de propiciar el necesario acercamiento intuitivo al concepto antes de la formalización rigurosa y revelar el concepto de límite en sus dos aspectos como proceso y como resultado, reconociéndolo como modelo para procesos de paso de lo finito a lo infinito y de lo discreto a lo continuo, lo cual constituye un objetivo general esencial para lograr la habilidad de identificarlo.

Este objetivo general decide sobre la orientación de los objetivos parciales de cada clase, y condiciona las situaciones problémicas a seleccionar para cada actividad docente.

Dichas situaciones problémicas tienen como objetivo identificar las caracterís-ticas esenciales que se dan en el proceso de límite, a saber: la relación funcional que se establece entre las magnitudes que intervienen en dicho proceso, la caracterización del concepto como una relación de causa y efecto lo cual requiere un punto de vista dinámico y la interpretación geométrica del mismo.

Para el análisis de estas situaciones problémicas se ha de requerir del uso de un conjunto de heurísticas como dibujar una figura de análisis, designar las magnitudes que intervienen en el problema con variables, conjeturar sobre las diferentes características que se observan en el problema, etc., las cuales deben ser sistematizadas a lo largo del tema.

La conferencia inicial del tema se presta para introducir el principio de Analogía, como uno de los principios generales heurísticos, con el fin de determinar características comunes entre los problemas planteados. Se le explica a los estudiantes en qué consiste dicho principio y se les muestra su utilización en diferentes direcciones, como por ejemplo:

- Para descubrir y formular una proposición nueva para ellos.
- Para sugerir el método y el procedimiento para la demostración de una proposición nueva.

- Para sugerir la vía de solución de un problema o de un ejercicio.

Con la ayuda de este principio y los otros recursos heurísticos enseñados, los estudiantes deben descubrir las características esenciales presentes en el concepto de límite (referidas con anterioridad) las cuales les permitirán formular finalmente la definición.

El concepto así tratado tiende a ser más asequible, perdurable y aplicable en diversas situaciones por el sujeto que aprende.

Conclusiones:

Este trabajo pretende mostrar el papel de la Instrucción Heurística como una alternativa pedagógica útil para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos.

El mismo presenta algunas acciones didácticas llevadas a cabo en el ISPJAE relacionadas con el estudio e implementación de la instrucción heurística en el desarrollo y perfeccionamiento del Calculo Diferencial, específicamente en el proceso de asimilación del concepto de límite.

Referencias Bibliográficas:

- **Hernández, S.** (1991). *"El tratamiento de los procedimientos de solución heurística en la enseñanza de la Matemática y la realización del trabajo mental de los alumnos"*. ISPEJV. Cuba.
- **Méndez, C.** (1995). "La instrucción heurística como recurso para estimular el razonamiento." *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa*. Tomo II. Cuba.
- **Santos, L.** (1994). " La resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas". *Cuadernos de investigación # 28* CINVESTAV- IPN. México.
- **Schoenfeld, A.** (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Inc. USA.
- **Torres, P.** (1993). "La Enseñanza Problémica de la Matemática del nivel medio general". *Tesis Doctoral*. Ciudad de la Habana, Cuba.

La instruccion universitaria en ciencias y el pensamiento lógico formal
II-Correlación entre el nivel del pensamiento lógico y el rendimiento académico de los alumnos

García P. V. de, Galindo S. G. de, Morán J. A. de
Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia
Universidad Nacional de Tucumán. Argentina

Resumen.

En la primera parte de este trabajo, se estudió la posible evolución de ciertas habilidades del pensamiento lógico formal de alumnos de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia de la Universidad Nacional de Tucumán, después de un año de instrucción universitaria. Se llegó a la conclusión que se habrían experimentado progresos en algunas habilidades del pensamiento, descriptas en las operaciones lógicas por Piaget e Inhelder.

Esta segunda parte del estudio se propone analizar la existencia de asociación entre un estimador del rendimiento académico de los alumnos y el nivel alcanzado por los mismos en el desarrollo del pensamiento lógico formal.

Para lograr este objetivo se tomaron al azar, en distintas etapas, dos muestras aleatorias en forma sistemática: una de alumnos de primer año que finalizaban el segundo cuatrimestre (año1995) y otra de alumnos ingresantes a la Facultad (año 1996). Ambos grupos de estudiantes resolvieron un test estandarizado escrito cuyos ítems se diseñaron para medir el nivel alcanzado en las operaciones lógicas descriptas por Piaget e Inhelder.

Como indicadores del rendimiento académico se utilizaron:

- El promedio de los puntajes de las asignaturas evaluadas en el examen de ingreso, para el grupo de los ingresantes.
- El promedio de los exámenes parciales de las materias cursadas en el segundo cuatrimestre, para el grupo de los alumnos de primer año.

Mediante el coeficiente de correlación de Pearson se analizó la posible existencia de asociación lineal entre el rendimiento académico general y un cuantificador del pensamiento lógico formal.

Posteriormente se estudió la significación de los mismos utilizando el test T, a un nivel del 5%, llegando a la conclusión que en ambos grupos, a estudiantes con buen rendimiento académico correspondería un buen nivel en el desarrollo del pensamiento lógico formal.

Introducción:

El planteo del trabajo, el diseño muestral y experimental de los datos son los expuestos en la primera parte de la investigación. (I- El pensamiento lógico formal después de un año de estudios universitarios en ciencias).

Con el propósito de seguir analizando la interrelación entre el pensamiento formal y el aprendizaje de las disciplinas científicas, se centrará ahora el estudio en la posible existencia de correlación entre el nivel del pensamiento lógico formal alcanzado por el estudiante y su rendimiento académico en ciencias.

Metodología:

El instrumento de evaluación utilizado fue el test estandarizado escrito presentado en la primera parte de este trabajo.

El mismo constaba de diez ítems elaborados con el objeto de proporcionar información sobre las operaciones lógicas descriptas por Piaget e Inhelder: Razonamiento proporcional, Razonamiento combinatorio, Razonamiento probabilístico, Razonamiento condicional , Variables controladas y Aplicación de una regla universal.

Los resultados de la aplicación de este instrumento permitieron definir, en la primera parte de este trabajo, un indicador que mediría el desarrollo del pensamiento lógico formal alcanzado por los alumnos.

En este estudio el parámetro que mediría el **rendimiento académico general del alumno** se determinó de la siguiente manera:

- para la muestra de alumnos de primer año, como el promedio de las notas obtenidas en los exámenes parciales de cada asignatura,
- para la muestra de alumnos ingresantes, como el promedio de las notas de las asignaturas evaluadas en el examen de ingreso .

Se utilizó el coeficiente de correlación de Pearson para medir la posible existencia de asociación lineal entre rendimiento académico general y el indicador del pensamiento lógico.

La significación de este coeficiente se probó con un test T, con un nivel del 5%.

Resultados:

Valor del coeficiente de correlación de Pearson calculado entre el rendimiento académico general y el pensamiento lógico

Muestra de alumnos de primer año	**0,58**
Muestra de alumnos ingresantes	**0,54**

Utilizando el test T, con un nivel del 0,05, se comprobó que ambos coeficientes serían significativos.

Conclusiones:

Los valores del coeficiente de correlación entre los indicadores del nivel de pensamiento formal y el rendimiento académico, para ambas muestras, son muy próximos entre sí. Por tratarse de valores significativos de acuerdo al test T, podría inferirse, para ambos grupos, la existencia de asociación lineal entre el rendimiento académico general y la capacidad para resolver situaciones que requieren del pensamiento lógico formal (a mayor rendimiento académico mayor habilidad para resolver ciertos problemas).

Sin embargo, aunque son significativos, los valores de ambos coeficientes son bajos. En consecuencia, cabe inferir la existencia de otras variables, no consideradas en el presente estudio, que podrían explicar mejor la relación existente. Coincidimos así, con algunos autores que opinan que para resolver tareas científicas, el pensamiento formal es condición necesaria pero no suficiente. No siempre individuos que hayan alcanzado este tipo de pensamiento lo utilizan en tareas que así lo requieran.

Propuestas:

Queda abierta la posibilidad de hacer una nueva investigación, incluyendo variables no consideradas en este estudio, las que explicarían mejor la correlación existente entre pensamiento lógico formal y el rendimiento académico del alumno. De esta manera se incrementarían los valores de los coeficientes de correlación encontrados. Utilizando técnicas de análisis factorial podrían extraerse los factores principales que explicarían un alto porcentaje de la variabilidad total.

Los resultados obtenidos ofrecen pautas para la reflexión acerca de las dificultades experimentadas por los alumnos en el proceso del razonamiento, imprescindible en el aprendizaje de las ciencias.

Sería conveniente recabar y analizar las opiniones de los alumnos y de los profesores, acerca de las dificultades en el aprendizaje de la resolución de problemas.

Referencias Bibliográficas:

- **Inhelder, B. y Piaget, J.** (1955). *De la lógica del niño a la lógica dei adolescente*. Buenos Aires. Argentina. Editorial Paidós.
- **Emery, J.** (1973). The status of certain probabilility concepts and combinatorial abilities of high school biology students and the effect of genetics instruction on these cognitive characteristics. *Disertation Abstracts*, Vol A, (pag. 3133).
- **Lawson, A. y Renner, J.** (1975). Relationship of Science Subject Matter and Development Levels of Learners. *Journal of Research in Sciencie Teaching*, Vol 12, (pag. 347).
- **Linn, M. y Their, H.** (1975). The effect of Experiential Science on Development of Logical Thinking in Children. *Journal of Research in Sciencie Teaching*, Vol 12, (pag. 49).
- **Carretero, M., y García, J.** (1984). *Lecturas de psicología del pensamiento*. Madrid. Alianza Editorial.

Hacer y enseñar matemáticas: marco histórico-conceptual

Jorge Gómez Arias
E.S.F.M. - I.P.N. México

Resumen: En este artículo se construye el marco histórico para un posterior análisis de algunas importantes propuestas didácticas. Aquí se estudia la noción de "matemáticas" en dos sentidos: como disciplina científica y como objeto de la enseñanza. Tras formular los enunciados básicos del metalenguaje con el cual se describe y explica al objeto estudiado, se expone la historia de la disciplina, dentro del desarrollo triádico "práctica social (el origen)- conocimiento científico- quehacer matemático". Una vez establecido este contexto se bosqueja la historia de la enseñanza de las matemáticas. Se concluye, entre otras cosas, que estando determinada la enseñanza de las matemáticas por los peculiares rasgos de la disciplina, del seno de la misma práctica docente de las matemáticas han surgido -sobre todo en momentos culminantes del desarrollo matemático- algunas de las teorías fundamentales de la disciplina, como en los casos ejemplares de Lobachevski y Riemann (o de Mendeleiev en química), donde la necesidad de sistematizar los conocimientos a transmitir implicó por fuerza el análisis conceptual del tema. **Es imprescindible, por tanto, rescatar la íntima vinculación entre el quehacer matemático y la enseñanza de esta disciplina, así como entre ésta y la investigación didáctica; asimismo se requiere enfatizar en la docencia el significado de la aplicación de las matemáticas (siempre en relación con las bases teóricas elementales, aunque no necesariamente esas bases sean abordadas deductivamente).**

Este artículo busca determinar cuáles son las relaciones causales, funcionales y estructurales entre la matemática y su enseñanza. Con ello, se tendrá el marco necesario para la ubicación epistemológica de algunas de las propuestas más recientes acerca de la enseñanza de las matemáticas, que es el tema de la investigación dentro de la cual está inscrito el presente texto.

El recurso de formular en términos de un "metalenguaje" (que en esta ocasión es el llamado lenguaje "natural") el sistema de enunciados desde los cuales el objeto de estudio "matemáticas" será descrito y explicado, recurso tomado con las reservas del caso de la lógica formal, sirve para hacer explícito el carácter ineludiblemente parcial que conlleva toda investigación y, sobre todo, para poder describir, analizar y en su caso, valorar las teorías didácticas que se estudiarán más adelante en una posterior etapa de esta investigación (de la cual el artículo sintetiza los resultados de la primera fase). El "metalenguaje" a construir debe ser necesariamente más general que los lenguajes (teorías) estudiados. Por ello, dicho metalenguaje resulta equivalente al MARCO TEÓRICO. Sus enunciados -expuestos a continuación- corresponden a los tres niveles conceptualmente integrados que conforman, según criterio del autor, a toda propuesta didáctica: el nivel epistemológico, del cual se derivan los otros dos: el psicológico y el pedagógico.

Las proposiciones básicas de tal metalenguaje son:

Nivel epistemológico:

- La realidad objetiva existe y puede ser conocida, dicho conocimiento puede ser transmitido en medida suficiente para que el concepto de "enseñanza" tenga tanto sentido como el de "aprendizaje".

Nivel psicológico:

- El conocimiento es un proceso social-histórico, basado en el desarrollo de la práctica social y en el sustrato biológico de las funciones del cerebro humano. Por lo tanto, el modelo de "estímulo-respuesta" es válido para los seres humanos -igual que para el resto de los seres vivos- pero con la particularidad de que, en los niveles superiores del conocimiento, dicho modelo resulta insuficiente puesto que entre los estímulos y las respuestas surge un conjunto de eslabones intermedios (producto de las actividades propiamente humanas y cristalizados en la cultura social), tales como los instrumentos manuales y, sobre todo, *el lenguaje*. La aparición de estos eslabones intermedios es lo que permite que un individuo ante un estímulo dado pueda responder de múltiples maneras y no de una sola forma automatizada.
- Todo conocimiento es, en su origen, una actividad objetiva ya signalizada y trasladada por el lenguaje interior al pensamiento por efecto de la enseñanza que orienta al desarrollo espontáneo de las funciones psíquicas superiores. La característica peculiar del conocimiento es la de *ser significativo* para el sujeto (o sea, la de poder ser codificado y decodificado por él dentro de sus sistemas sígnicos abstractos y generales, como el lenguaje llamado "natural"). Todo significado cognoscitivo consta de dos planos: el general-objetivo y el del sentido personal que inevitablemente tiene para el sujeto.

Nivel pedagógico:

- La esencia del proceso de enseñanza-aprendizaje es el conjunto de relaciones que, en la práctica escolar, se establecen con fines cognoscitivos entre profesor y alumno, entre los alumnos mismos y dentro de cada alumno consigo mismo (reflexión interna). El marco idóneo para el adecuado desarrollo de estas relaciones es la actividad (externa o interior) didácticamente planeada* .
- Si se cuenta con una teoría y un método general del conocimiento, se tiene la herramienta necesaria para hacer el análisis crítico de cualquier propuesta didáctica y para integrar los aspectos positivos de las más diversas propuestas didácticas, sean o no contradictorias. Los llamados principios básicos de la enseñanza ("ir de lo simple a lo complejo", etc.) son versiones específicas de los principios emanados de la lógica del desarrollo del conocimiento.

La segunda parte de este texto es un esbozo, lo más breve y sustancial posible, del desarrollo histórico de las matemáticas, vistas como un producto del desarrollo de la práctica social, a través de las mediaciones del conocimiento científico-técnico. En la exposición se ha procurado combinar los momentos de análisis con los de esquematización sintética. Ésta es una síntesis del estudio histórico aludido:

1. Las operaciones prácticas de conteo y medición, aunque ya muy posteriores a la probable fecha de la aparición de grupos humanos (puesto que exigían un grado de abstracción y generalización bastante desarrollado), debieron tener un muy largo desarrollo para alcanzar un grado de repetición cotidiana tan elevado que permitiera que el origen de su representación *simbólica* estuviera aparejado al de la escritura ideográfica, usada por los babilonios. Es claro que, en estas condiciones, ***el desarrollo de la matemáticas estaba subordinado no sólo a las necesidades prácticas de la sociedad sino al grado de desarrollo de ciertas técnicas sociales de primer orden, como la de la evolución del lenguaje escrito.***

---

* La base de los enunciados del nivel psicológico están tomados sobre todo de las obras de Vigotski, Leontiev y Luria (ver bibliografía).

2. En Grecia, a partir de Tales, las condiciones históricas posibilitaron que el conocimiento en general, y el matemático en especial, se independizaran de las necesidades sociales (la filosofía pitagórica expresa nítidamente la nueva autonomía del quehacer matemático). Pero es en el periodo helenístico, al fin del apogeo de la Grecia clásica, cuando el desarrollo matemático alcanza su máximo nivel: Euclides lleva hasta sus últimas consecuencias el racionalismo típico del pensamiento griego y escribe sus *Elementos* (donde por cierto están presentes muchos elementos empíricos espontáneos si se considera que sus proposiciones -no basadas en la construcción geométrica- son experimentos mentales, lo que explicaría las posteriores acciones de Newton de darle una interpretación empírica, y de Birkhoff por quitársela); mientras que Arquímides - en sus obras *Equilibrios* y *Arenario*- sí incursiona en el experimento pero supedita cualquier conclusión a su rigurosa demostración teórico-geométrica (ambos enfoques reflejan la crisis de la sociedad griega, son cumbres de su racionalismo a la vez que recurren a lo empírico por un utilitarismo recién surgido ante los apremios de las guerras, la competencia comercial, etc.). *El desarrollo de las matemáticas abstractas no impidió que la disciplina se subordinase de nuevo a las condiciones y necesidades sociales. Sin embargo, dicho desarrollo ya no dependía totalmente de técnicas sociales como la escritura (aunque la carencia para la notación simbólica de los números fue un factor que frenó el desarrollo matemático griego). Además de eso, la intuición del infinito matemático chocó con las creencias religiosas de la época, lo que fue otro factor social que impidió el avance matemático.*

3.Es sabido que en el medioevo europeo la iglesia jugó un papel profundamente conservador y represivo, un terror a perder su poder basado en la alianza con los primeros reyes germánicos establecidos después de la caída del imperio romano. A este papel del clero correspondió la pretensión de subordinar todo conocimiento a los dogmas teológicos. Fue un periodo de estancamiento científico y matemático (por ejemplo, recién adoptada la notación arábiga de los números, llegó a ser prohibido su uso todavía en tiempos de Fibonacci).

Si bien desde el siglo XIII el naciente capitalismo había consolidado la fuerza de la burguesía y el comercio en varias ciudades italianas, hasta el siglo XVII el conocimiento científico y el matemático dieron un gran salto con el descubrimiento cartesiano del concepto de variable, con el descubrimiento de Newton y Leibnitz del cálculo integral y diferencial, con la aparición del tratamiento probabilístico del azar por Bernoulli, Huygens y Pascal y con el primer intento de integrar a la matemática con la lógica (Leibnitz) -una vez asumido el poder por la burguesía en Inglaterra y reconocida su presencia política en Francia, ante el apremio de la competencia mundial y los avances acumulados hasta entonces-. *El desarrollo de la matemática se debió, precisamente, a su subordinación a las necesidades económicas; al mismo tiempo, las teorías resultantes fueron tan generales que con ellas se logró resolver posteriormente varios problemas técnicos esenciales de la revolución industrial y se desarrollaron nuevas teorías físicas (Coulomb, Faraday, etc.) La notación matemática llegó a un nuevo grado de abstracción.*

4. Fue sin embargo un acontecimiento matemático, el descubrimiento de una nueva geometría, hecho por Lobachevski en 1826-1848, el que hizo necesarios la rigurosa demostración formal de las matemáticas y el desarrollo del método axiomático propio de la disciplina actual. *El avance de las matemáticas fue el detonador del nuevo enfoque matemático y, por lo mismo, de la relativa independización del desarrollo matemático respecto a la práctica social.*

5. Desde finales del siglo XIX, el desarrollo matemático ha alcanzado un impulso nunca antes visto. Sin estar nunca del todo separado de la práctica y las necesidades de la sociedad moderna, las teorías se han desprendido de su referencialidad empírica

inmediata (que todavía con Lobachevski era vista como ineludible). *Pero la actual tendencia de las matemáticas es la de regresar a niveles más concretos y prácticos puesto que, como se ha visto, la práctica social ha estimulado más que frenado el avance matemático (más aún después de que Gödel y Cohen han comprobado las limitaciones ineludibles de la propia formalización).*

En lo tocante al desarrollo de la enseñanza de las matemáticas: desde su inicio en Sumeria (3 mil año a.n.e.) la resolución de problemas ha sido una actividad central; otra constante ha sido la división entre matemáticas para la enseñanza general y matemáticas superiores para los expertos; desde el siglo XVII el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas ha ido acompañado por la creación de instituciones complementarias (sociedades de investigación, etc.); hay una doble tendencia: aumentar el número de años u horas de los niveles elemental y básico e incluir en el currículum de los niveles inferiores temas que anteriormente se reservaban a los superiores; la masificación educativa de las sociedades modernas trae aparejada la complicación y -según algunos- la pauperización de la enseñanza matemática, incluso de la elemental; finalmente, la creciente división del trabajo tiende a separar las actitidades de la docencia y la investigación, también en matemáticas, lo cual parece haber empobrecido el nivel matemático de los docentes y el contacto de los investigadores de la matemática o de su didáctica con la práctica educativa.

Conclusiones: Una tarea urgente es la de *restaurar los vínculos casi cotidianos entre el quehacer matemático, la investigación didáctica y la enseñanza de la disciplina por diversas vías (cursos de intercambio entre investigadores y docentes de todos los niveles, actualización matemática de los docentes, revisión curricular acorde a las condiciones del desarrollo matemático en cada país, etc.)*, pues del seno mismo de la enseñanza han surgido teorías tan trascendentales como las de Lobachevski y Riemann. Mi propuesta para este Foro es la de crear y/o reforzar los mecanismos -una publicación bianual, por ejemplo, o algún otro que sea viable- para sistematizar y estrechar las interacciones entre los matemáticos teóricos, los investigadores de la didáctica de las matemáticas y los profesores de todos los niveles escolares (de algún modo Freudethal plantea algo similar, no idéntico, en el artículo referido en la bibliografía de este trabajo).

Desde el *Programa de Erlargen* de Klein, la enseñanza de las matemáticas a lo largo de este siglo ha sido objeto de múltiples análisis y formulaciones didácticas, contándose entre otras el constructivismo, el realismo o el formalismo. Siguiendo la tendencia (sintetizada por Hilbert a fines del siglo XIX) de trabajar con una progresión ascendente de "abstracciones de abstracciones" surgió en la década de los treintas el modelo de rigurosa formalización lógica de la matemática (grupo Bourbaki), cuya influencia llegó hasta el nivel elemental de enseñanza (Jean Kuntzman designa a este modelo como "matemática fundamental"). Empero, la actual tendencia se orienta a la "matemática concreta" (Kuntzman) y, en especial, a la interpretación y aplicaciones empíricas de la matemática abstracta frente al apremio de la globalización económico-cultural que estamos viviendo; tal es el origen de la nueva tendencia del quehacer matemático -reforzada esta vez por el decaimiento de los análisis más abstractos dentro de la propia disciplina-. La emancipación absoluta de las matemáticas respecto a la práctica social revela, una vez más, su carácter ilusorio. La posibilidad de hacer matemáticas sin considerar referencia alguna del mundo objetivo no es criterio suficiente para absolutizar el distanciamiento entre la matemática y la realidad, como lo demuestra el que muchas teorías matemáticas otrora consideradas "divorciadas" de lo real, por su enorme grado de abstracción, han revelado su capacidad para modelar muchos procesos objetivos, mismos que a su vez demandan el desarrollo teórico de la matemática (de Broglie). *La enseñanza actual de las matemáticas tiene que incidir por tanto en el aspecto aplicado de la disciplina, sin omitir, claro, las bases teóricas* *indispensables: insertando sus contenidos en el mundo de la experiencia cotidiana de los estudiantes (p.ej., a través de la computación y recursos similares) y, sobre todo, diseñando apropiadamente las actividades que hagan significativo el aprendizaje de esta disciplina a los jóvenes.* Ya no es posible sostener en la enseñanza de las matemáticas la falsa ilusión de unas matemáticas totalmente formalizadas, exentas de lo heurístico, totalmente divorciadas de la realidad. Siendo indispensable seleccionar las teorías generales fundamentales de la disciplina -y utilizar en ciertos momentos de los cursos las exposiciones deductivas- conviene recalcar que, antes o después de la teoría, deben aparecer siempre las referencias, ejemplos y problemas práctico-empíricos. Los mismos significados teóricos no necesariamente deben ser abordados siguiendo la rigurosa deducción formal (muy a menudo su exposición puede hacerse abreviando o simplificando las derivaciones formales o apelando a experiencias intuitivas de los estudiantes donde tales significados se hacen necesarios).

Por lo mismo, ya no es suficiente limitarse a enseñar los contenidos tradicionales en los niveles medio y medio superior; hay que profundizar en el estudio de la estadística -sobre todo de la inferencial- como una herramienta esencial en casi todos los campos de la vida moderna (modificando el enfoque probabilístico más bien teórico por otro que conjugue lo descriptivo con lo inferencial, mediante lo probabilístico). Es importante también, diferenciar en la enseñanza a los conceptos matemáticos abstractos de sus múltiples formas semióticas de registro para ser representados, de modo que cada profesor debe orientar las actividades de los alumnos a la comprensión intuitiva, personal, de los conceptos matemáticos, pero sin deformar el significado objetivo, formal y riguroso, de dichos conceptos. Finalmente, en lo posible debemos complementar el enfoque algorítmico y formal de las matemáticas superiores con la capacitación de los alumnos para crear o descubrir estrategias para la resolución de situaciones y casos problemáticos (que son los más frecuentes en la vida laboral y profesional cotidiana). Esto y los rasgos de nuestra sociedad en crisis explican porqué las propuestas más recientes sobre la didáctica de las matemáticas poseen, en general, un carácter más empírico y pragmático. Pero este será el tema de un artículo posterior. Lo que nos muestra la más reciente historia de las matemáticas es que de ella han surgido nuevas vertientes de la actual práctica social, tanto en la computación como en los sistemas digitales y en muchos campos más. Y que la enseñanza de la matemática dista de ser un proceso puramente formal y constructivo: se impone la tarea de trasladar este dominio al de los problemas, por lo común menos estructurados que los hallados en los libros de texto, propios de la práctica laboral y profesional cotidiana. Esto exige repensar la noción de planeación y diseño de un curso. Queda en pie esta pregunta: ¿es factible adaptar los métodos de enseñanza ya comúnmente empleados en países desarrollados como EUA, Francia o Inglaterra (basados en el autoaprendizaje y en la minimización de los roles del profesor) a nuestros países? Si es así, ¿cómo hacerlo?

FORMACIÓN DE PROFESORES

Curso: Patrones y relaciones

Teresita Peralta Monge
Instituto de Investigaciones para el Mejoramiento de la Educación Costarricense (IIMEC)
Universidad de Costa Rica
Consejo Nacional para Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICIT)
Costa Rica

El curso se basa en las experiencias en relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la escuela primaria, desarrolladas en el proyecto "Plan piloto para el mejoramiento en la enseñanza de las Ciencias y la Matemática". Hace uso del descubrimiento de patrones como una estrategia en la resolución de problemas, incursionando también en la construcción de patrones. Considera el razonamiento inductivo en el análisis de secuencias aritméticas y geométricas, en el descubrimiento de patrones y en la formulación de conclusiones.

Wheatley (1990) considera la concepción constructivista de la Matemática como una actividad de construcción de relaciones y patrones mediante la experimentación, el cuestionamiento, la reflexión, el descubrimiento, la invención y la discusión.

Señala además Wheatley que frecuentemente los estudiantes hacen sus tareas escolares de Matemática con el propósito de realizarlas correctamente y concluirlas o para aprender un procedimiento demostrado por otro, el cual muchas veces tiene poco significado para el aprendiz por responder a una Matemática que es estudiada como un conjunto desintegrado de hechos y principios independientes, concepción que fracciona el contenido en pequeñas unidades para una acumulación paulatina del conocimiento a través de la práctica de destrezas, la aplicación de reglas y memorización de datos.

En contraposición a esta práctica está el promover el compromiso del estudiante en actividades de aprendizaje cuyo propósito sea el de construir relaciones para la obtención de resultados significativos, siendo el maestro el responsable de proveer situaciones que propicien en el estudiante esta construcción de significados mediante la elaboración de esquemas basados en sus propias experiencias, donde el conocimiento matemático es concebido como una actividad del cognoscente y es favorecido por su enfrentamiento a una tarea para la cual no hay un procedimiento conocido disponible, dándose la enseñanza-aprendizaje de la Matemática desde una perspectiva centrada en la resolución de problemas, que estimula a cada estudiante para que elabore sus propias construcciones conceptuales que le permitan ordenar el conocimiento en esquemas útiles para resolver problemas.

El descubrimiento de patrones como una de las estrategias más consideradas en la resolución de problemas, hace uso de razonamiento inductivo basado en el análisis de casos conjuntos de información, secuencias numéricas y geométricas, para el descubrimiento de patrones y la formulación de conclusiones.

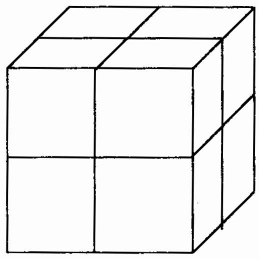
En Matemática la palabra secuencia es usada para describir términos dados de manera que pueden ser considerados bajo un ordenamiento en el que hay un primero, un segundo, un tercer elemento y así sucesivamente.

Una secuencia aritmética es aquella en la que cada término se obtiene a partir del término anterior y la suma de un número determinado, como por ejemplo 1, 3, 5, 7, ...

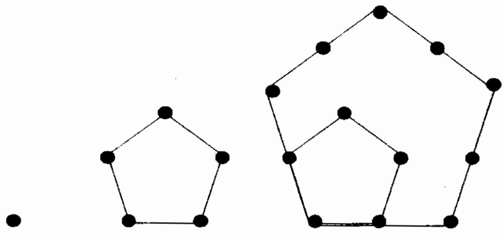
Una secuencia se define como geométrica cuando cada término se obtiene a partir de la multiplicación del término anterior por un número determinado llamado la razón, como por ejemplo 1, 2, 4, 8, ...

Otras secuencias no son clasificadas como aritméticas ni geométricas. Estas fueron estudiadas por lo griegos de la antigüedad quienes analizaron las relaciones existentes entre los números y las figuras geométricas. Estos números se denominaron números figurativos por poder ser representados como figuras geométricas, como los arreglos siguientes:

Números cúbicos: 1, 8, 27, 64, ...

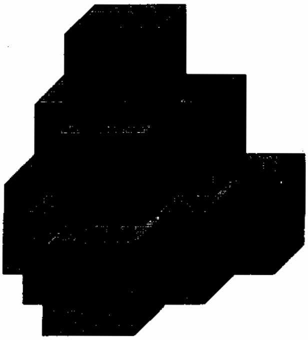


Números pentagonales
1, 5, 12, 22, 35,...



Números tetraedros

1, 4, 10, 20, ...



Objetivos.

1. Proponer a los participantes experiencias didácticas que contribuyan a construir sus conocimientos en relación con el descubrimiento de patrones, como una estrategia en la resolución de problemas y construcción de conceptos matemáticos.
2. Promover la discusión y el análisis entre los participantes, para que en su rol de facilitadores de la construcción de significados por parte de sus estudiantes, analicen el uso del descubrimiento y construcción de patrones para una Matemática como actividad de construcción de modelos y relaciones

Metodología.

La actividad en el curso se centrará en las experiencias de los participantes, para promover el análisis y la discusión entre ellos, y para una construcción de significados con base en los supuestos teóricos siguientes:

- los estudiantes aprenden de la solución de situaciones problemáticas que se les presentan (Wheatley, 1990).
- la Matemática en clase es una actividad cooperativa, son los estudiantes interactuando con sus compañeros y maestros, los que pueden construir el conocimiento (Wheatley, 1990).
- los maestros serán mejores en su función docente cuando más improvisen ambientes de aprendizaje que permitan a los estudiantes construir sus propias ideas, facilitándoles problemas que los estimulen a hacer sus propias construcciones (Wheatley 1990).

Referencias Bibliográficas:

- **Bilistein R., Libeskinds, J.** (1987). *Mathematics for Elementary School Teachers*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, USA.
- **Delgado, V.; Peralta, T. y Valerio, N.** (1995). *Experiencias didácticas, Matemática I y II*, Ciclos. Costa Rica, IIMEC, UCR, UNA.
- **Thompson, F.** (1994). *Hands-On Math!* The Center for Applied Research in Education, USA.

La enseñanza de la matematica a no matematicos

Andres Fraguela Collar
Benemerita Universidad Autonoma de Puebla
fraguela@fcfm.buap.mx

Cuando nos planteamos como formar a los estudiantes en las universidades y en el nivel medio superior capaces de comprender y aplicar el conocimiento matemático en las condiciones actuales de desarrollo de la ciencia y la técnica, debemos de comenzar por pensar como capacitar a las personas encargadas de esa formación y como desarrollar en los estudiantes las necesarias aptitudes, capacidades y habilidades para el planteamiento, solución y aplicación de los problemas matemáticos.

En el presente trabajo se explica como el desarrollo actual de las matemáticas y las exigencias de su aplicación nos sugieren la forma en que debe de transmitirse este conocimiento y algunas errores que no deben de cometerse al hacerlo.

Quiero enmarcar las ideas y reflexiones expuestas en este trabajo en un contexto global el cual se irá estrechando hasta llevarnos al tema que nos interesa sobre las características del proceso de enseñanza de la matemática a no matemáticos en la actualidad.

Para ello comenzaré por una afirmación lo suficientemente general como para no poder ser refutada: La cultura en cualquier época está, **de alguna manera**, determinada por el nivel de desarrollo social de ese momento.

Como consecuencia: La ciencia como componente importante de la cultura no escapa de la influencia del desarrollo social.

De está forma podemos comenzar por planteamos como nos ha ido desarrollandose la matemática a medida que ha ido evolucionando la sociedad hasta nuestros días.

Sin querer convertir este trabajo en una exposición sobre la historia de las matemáticas solo mencionaré que, a grandes trazos, existe un acuerdo en considerar cuatro etapas principales del desarrollo de la matemática. La primera etapa en la cual aun no estaba constituida la matemática como ciencia data desde los tiempos mas remotos de la humanidad hasta los siglos VI-VII a.n.e.

En esta etapa los conocimientos matemáticos estaban relacionado con las exigencias domesticas de la vida cotidiana, la distribución (de cosechas, ganado, etc..), la necesidad de medir (áreas de parcelas, volúmenes de vasijas y piezas para la construcción) y el comercio mas simple.

Al finalizar este periodo comienza en Babilonia y China un intento de sistematización e interpretación del material acumulado.

Si bien la pregunta fundamental de la primera etapa era ¿como? en la segunda etapa, llamada **de las magnitudes constantes** la pregunta es ¿por que?. En la Grecia antigua y el Oriente el trabajo físico era solo atributo de artesanos y esclavos mientras que la aristocracia se dedicaba a desarrollar la filosofía y la ética del individuo. Este ambiente fue favorable para el establecimiento de los fundamentos de la matemática como ciencia. Los griegos investigaron la ciencia de los números y las operaciones con ellos, creando así la **aritmética**.

Se introdujo por primera vez el método axiomático cuyo más alto grado de perfección lógica se vio materializado en el desarrollo de la geometría de Euclides. Simultáneamente en el Oriente se prepararon los fundamentos del álgebra.

El estimulo fundamental para el desarrollo de la siguiente etapa conocida como **etapa de las magnitudes variables**, fue las exigencias de la técnica, la navegación, el arte militar y los problemas ingenieriles. En esta etapa ya no se estudiaban solamente los números, las figuras geométricas y sus relaciones cuantitativas, sino apareció la idea de representar matemáticamente las nociones de continuidad, movimiento y cambio a través del concepto de función introducido por René Descartes. Esta idea alcanzó un alto grado de perfección con el desarrollo del calculo diferencial e integral por Newton y Leibnitz, el cual se convirtió en una herramienta decisiva para la investigación cuantitativa de los procesos y la aplicación de la matemática a las ciencias naturales. Ya en esta época, matemáticos como Descartes y Leibnitz afirmaron que la matemática no solo era aplicable a los objetos que ella habría creado sino también al proceso de razonamiento. Por último tenemos la etapa actual cuyo inicio, a mediados del siglo XVIII se identifica con los trabajos de Lovachevsky y Gauss en la geometría, particularmente con la introducción en la geometría no euclidiana de Lovachevtsky; los trabajos de Galois en la teoría de grupos y cuerpos que condujeron al desarrollo del Algebra abstracta y los trabajos de Cauchy y Abel en el Análisis.

Un poco mas tarde Peano y Hilbert completaron la axiomatización de la geometría Euclideana liberándola de las ideas intuitivas de Euclides para quedarse solo con las relaciones entre las entes considerados. También alcanzan un desarrollo considerable en este periodo la Lógica expuesta en el tratado de Boole y la teoría de conjuntos expuesta por Cantor. La extensión efectuada por Hilbert de la geometría Euclideana a los espacios de dimensión infinita permitió la unificación de los métodos algebraicos, analíticos y geométricos para el estudio de las ecuaciones diferenciales y por lo tanto, para la aplicación de la matemática a los modelos más complejos de la física y las ciencias naturales.

Debe destacarse como un aspecto fundamental de esta etapa el llamado programa de Erlanguen, dirigido por Felix Klein, en el cual se realizó un estudio sistemático y clasificación de las distintas geometrías de acuerdo a los grupos de transformaciones asociados. Pero quizás el hecho mas destacado en la culminación del método axiomático en este siglo fue el desarrollo por parte del grupo Bourbaki de los Fundamentos de la Matemática donde se pretendía dar una exposición sistemática y riguriza que pusiera de manifiesto la profunda unidad de una ciencia que a principios de siglo no era más que una colección de disciplinas prácticamente independientes.

Este salto cualitativo de la matemática de los inicios del calculo diferencial e Integral a la matemática actual no ha sido casual, ya que estuvo condicionado por la primera Revolución Industrial y los acontecimientos políticos en Europa Occidental que condujeron a la victoria de la burguesía sobre le feudalismo y el absolutismo. Precisamente el desarrollo exitoso de la matemática se llevó a cabo primeramente en Francia y más tarde en Alemania y Rusia donde la exigencia del desarrollo tecnológico, económico y social fué más sensible y la ruptura ideológica con el pasado se presento más claramente.

En la búsqueda de ideas comunes a varias ramas de la matemática se llego a la noción de **estructura** y más tarde a las abstracciones de segundo orden conocidas como **categorías**, distinguiendose tres estructuras madre: la topológica, la algebraica y la de orden.

Las llamadas matemáticas modernas están caracterizadas por el empleo del **método axiomático** y la **noción de estructura** haciendo desaparecer el **institucionismo** para dar paso al **rigor matemático** el cual esta indisolublemente ligado a la práctica de la aplicación e investigación matemática en la actualidad.

Todo lo anteriormente expuesto nos permite concluir que el fenómeno de las **matemáticas modernas** y el reto que nos impone la necesidad de desarrollar nuevos métodos para su enseñanza no están motivados por el capricho de los matemáticos de hacer inaccesible su ciencia, sino es la consecuencia natural de su desarrollo actual.

Esta necesidad de enfrentarnos a la problemática de saber enseñar la matemática a los no matemáticos esta determinada por:

1. El papel comprobado de la matemática en la creación de habilidades y de procedimientos lógicos de pensamientos aplicables a la solución de problemas de la vida cotidiana y en otras ramas del saber diferentes de la matemática.
2. El papel de la matemática en la modelación y la explicación cualitativa y cuantitativa del mundo que nos rodea.
3. El papel unificador del pensamiento matemático al ser la matemática una ciencia interdisciplinaria y una herramienta multidisciplinaria.
4. Así se ha llegado a la necesidad de una reforma en la enseñanza de la matemática en la época actual que se identifica con los nombres equivalentes de **enseñanza de la matemática moderna, enseñanza moderna de las matemáticas, educación matemática** o **matemática educativa.**

Cualquiera sea el nombre que le demas existen subproblemas importantes:

1. ¿Que enseñar? lo cual conduce a la definición de los contenidos y que depende de los objetivos a alcanzar y el nivel de los alumnos.

2. ¿Como enseñar? los contenidos y a aprender los contenidos. La enseñanza de los contenidos depende de las características del alumnado y para ello requiere motivaciones de los conceptos resultados y métodos así como de sus aplicaciones. Enseñar a aprender los contenidos significa crear métodos y habitos de razonamiento.

Si bien hoy en día al menos al nivel de la enseñanza preuniversitaria no existen muchas dudas acerca de la definición de los contenidos, sí hay muchas controversias sobre los métodos de su enseñanza.

Mi hipótesis consiste en que el problema fundamental a resolver esta en hacer que lo profesores conozcan muy bien la matemática del nivel que imparten.

Solamente de esta forma el profesor es capaz de motivar los conceptos, resultados y métodos de manera acertada y es posible crear habilidades en el alumnado.

Existen otros dos ingredientes importantes a tener en cuenta cuando se piensa en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática: **el nivel actual de la computación como herramienta de apoyo a dicho proceso** y **la aplicación de las técnicas y resultados de la psicología cognitiva y la neurolofisiología al aprendizaje.**

Sin embargo no debemos olvidar la frase de A. Einstein de que **todo debe hacerse lo mas sencillo posible pero no mas sencillo que eso** lo cual parece definir una especie de **principio de incertidumbre** en la enseñanza de las matemáticas y nos muestra que existen fronteras naturales determinadas por el carácter elitista que indiscutiblemente tienen las matemáticas hoy en día. La matemática actualmente es utilizada como un mecanismo de selección, así como el latin en la antigüedad para discriminar entre los individuos que pueden continuar a un nivel de estudios superior y por lo tanto, estar mejor preparados para enfrentar los retos de la sociedad moderna.

Esta ultima reflexión nos indica al gran compromiso social de quienes nos dedicamos a la enseñanza de esta ciencias.

Referencias Bibliográficas:

- **Dieudonne, J., Piaget, J., Choquet, G., Thom, R.** (1978). *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Alianza Editorial. Madrid, España.
- **Mayer, R.** (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Edicion Paidós. Barcelona, España.
- **Fraguela, A.** (1985). *Análisis matemático en espacios métricos*. Editorial Pueblo y Educación. Cuba.
- **Fraguela, A., Fernandez, J. L.** (1995). *La enseñanza de la matemática a nivel medio superior.* Programa de diplomado para profesores de enseñanza media superior. BUAP, México.
- **Fraguela, A., Fernandez, J. L.** (1995). *La matemática como ciencia interdiciplinaria y herramienta multidisciplinaria.* Programa de diplomado para profesores de enseñanza superior. BUAP, México.

La resolución de problemas en las clases de matemáticas

Blanca R. Ruiz Hernández (ITESM-CEM)
V. América López García (IECA)
Salvador Romano Reyes y Pedro Ortega Cuenca (CECyT 11-IPN)

En este trabajo hacemos el balance de un taller que surgió en las vocacionales (escuelas de nivel medio superior) del Instituto Politécnico Nacional (IPN) de México como una respuesta de los profesores politécnicos al reto que representó la instrumentación del nuevo plan de estudios en 1994. El taller cumplió cuatro etapas con la participación de más de doscientos profesores. También describimos cómo, a partir de la experiencia del taller, diseñamos el diplomado 'La resolución de problemas en las clases de matemáticas' en el que los profesores participantes tienen la oportunidad de obtener un producto integral y concreto: el diseño de una red de problemas vinculada con un objetivo curricular.

Introducción: El modelo bajo el que aprendimos, y que en gran medida reproducimos con nuestros alumnos, no es suficiente para las necesidades actuales. En este modelo se privilegian los conocimientos rígidos y las habilidades mecánicas, cuando ahora se requieren habilidades intelectuales de alto nivel y la formación de actitudes que favorezcan la independencia, autonomía y toma de decisiones racional en situaciones cambiantes e inciertas. Tal vez es por eso que con él logramos aprendizajes poco sólidos y duraderos. Necesitamos desarrollar una cultura matemática dinámica que nos permitan enfrentar ventajosamente diversas situaciones.

Afortunadamente el florecimiento de la educación matemática ha impulsado la profesionalización de la docencia, Ya no basta que el profesor «sepa» su materia, es necesario que se convierta en un profesional de la docencia, en un ingeniero en didáctica que esté al tanto de los resultados de las investigaciones de matemática educativa y que tenga claro, de manera explícita, cuáles son los principios en los que se fundamenta su práctica.

El modelo o plan de estudios vigente en el bachillerato del IPN, a partir de 1994, señala la necesidad de reconceptualizar el quehacer del profesor desde los ejes constitutivos de su trabajo, entre los que destacamos:

- Las relaciones que enmarcan y posibilitan su labor académica,
- los modelos educativos que orientan su práctica, y
- la axiología social y educativa que lo identifica con los fines y valores de la institución.

Sin embargo, bien lo sabemos que no basta la simple enunciación de las cosas por escrito para que se tengan. Por lo pronto diremos que el trabajo cotidiano del profesor se sustenta, explícita e implícitamente, en todo un sistema de ideas y creencias que tiene de lo que son las matemáticas, su enseñanza, su aprendizaje, la utilidad de un programa y su implementación. Este nuevo modelo exige un cambio en tal sistema. Pero el cambio de creencias es lento y se da por cuestionamientos y convencimiento propios, lo que nos puede conducir a adoptar una perspectiva nueva, llena de retos y sorpresas, para organizar aprendizajes complejos a partir de supuestos cualitativamente distintos de aquellos en los que se basa nuestra formación, necesitamos identificar los conocimientos habilidades, actitudes y valores que deberíamos revisar.

Por la complejidad del quehacer docente y por las políticas administrativas y laborales del IPN, en franca contradicción con el modelo, el casi nulo espacio de la Academia es insuficiente. El taller es una respuesta al reto de la instrumentación del nuevo plan de estudios en el IPN. En él se tiene la oportunidad de desarrollar conocimientos, habilidades y actitudes pertinentes al trabajo docente. Apunta a la profesionalización de la docencia, al ser un espacio de discusión, reflexión y organización del mismo. Sus principios rectores son la autonomía y la autodidaxia de los participantes. En él participaron más de 200 profesores en cuatro etapas, en su mayoría del IPN y a partir de la experiencia de los talleres, se diseñó, como una continuación natural, el diplomado 'La Resolución de Problemas en las Clases de Matemáticas'.

Objetivos del Taller: Los objetivos de la propuesta se concretan en cinco líneas:

- Vivir la situación de aprendizaje propuesta en la forma en que queremos que los alumnos la sientan, es decir que el profesor participe activamente en la organización de su propio aprendizaje, resolviendo problemas, haciendo inferencias, construyendo argumentos, leyendo críticamente, escribiendo, comunicándose eficazmente.
- Aprender matemáticas en ese ambiente. Así pues, se enfatiza la comprensión y el uso del conocimiento matemático tanto en situaciones familiares como inéditas.
- Planear, instrumentar y evaluar actividades de aprendizaje, en dos niveles: uno local, referido a sesiones de resolución de problemas con el propósito dual de aprender ciertas matemáticas y de aprender a resolver problemas; y otro más complejo de cursos o de ciclos de estudio en donde se requiere la consideración de redes de problemas para el desarrollo de campos conceptuales o líneas disciplinarias.
- La incorporación de las nuevas tecnologías, calculadoras con poder de graficación y computadoras, en un aprendizaje que potencia la comprensión, aprovechando la conversión de diversos registros de representación en un contexto de resolución de problemas.
- Por último, hay un esfuerzo sistemático por hacer explícitos los sistemas de creencias que sustentan nuestra práctica docente.

La Estructura del taller: El taller de resolución de problemas se encuentra estructurado de tal forma que se puedan cumplir los objetivos anteriormente expuestos. Los dos grandes bloques en los que se divide son: la PLANEACIÓN, a cargo del grupo de coordinadores (que también son profesores) y en la que el participante (en este caso, los profesores en su doble papel de profesores-alumnos) no participa directamente, y la SESIÓN DEL TA-

LLER propiamente dicha en la que el participante se verá expuesto, en un tiempo relativamente corto y por lo tanto no puede dejar de ser un tanto violento, a dos situaciones: como alumno y como docente.

Durante la PLANEACIÓN se analiza, de la manera más exhaustiva posible, el o los problemas que se van a poner en funcionamiento durante la sesión. El núcleo, y en ocasiones lo más difícil de definir, es el problema. La estructura del taller en sí misma es una propuesta de docencia y su eje principal es la planeación y resolución de problemas, por lo que vamos a enfocarnos a mostrarles lo que ocurre en él a través de un ejemplo. El análisis del problema utilizando un marco concreta los documentos que constituyen la planeación y que son los que hacen posible realizar este tipo de experiencias dentro del salón de clases.

El negro que no se raja: *En el instante $t = 0$, se comienza a introducir agua en un tinaco vacío, con un gasto de 40 litros/minuto. Este gasto se mantiene constante durante dos minutos, hasta que el tinaco contiene 80 litros. Desde $t = 2$ hasta $t = 4$, el gasto se reduce gradualmente hasta los 5 litros/minuto. Este gasto permanece constante durante los dos últimos minutos. En el instante final, $t = 6$, el tinaco contiene 135 litros. ¿Cuántos litros de agua contiene el tinaco cuando $t = 2.5$, 3 y 3.7 minutos? ¿Y en cualquier instante t?*

Supongamos ahora que se pone a funcionar una bomba en el instante $t=2$ y que, durante los cuatro minutos siguientes, se extrae agua del tinaco a un gasto constante de 15 litros/minuto. ¿Cuándo alcanza el nivel del agua su máximo valor?

Al analizar el problema se debe reconocer desde tres perspectivas importantes:

Los **aprendizajes previos** son los conocimientos necesarios para ponerlo en funcionamiento y que determinan el nivel del problema como soporte de la situación didáctica.

Como **soporte de una situación didáctica**, que consiste en prever qué actitud deben tomar los coordinadores durante la sesión. Los objetivos del problema deben proveer los elementos para que, de manera flexible, los dos momentos de importantes de la sesión: el trabajo en equipo y la discusión grupal queden controlados por los coordinadores. Esto se logra a través de los *lineamientos durante el trabajo en equipo* que deberán constituir una orientación hacia los profesores-alumnos en caso de parálisis y del *guión de la discusión* que serán los puntos deseables a tratar durante la exposición de las soluciones del problema..

En el problema «el negro que no se raja», decidimos que la situación se presentara en un registro textual y redactamos una parte del enunciado «el gasto se reduce gradualmente» de tal forma que diera lugar a la toma de una decisión. Privilegiamos la representación gráfica, es decir el vínculo geométrico entre el volumen y el área bajo la gráfica del gasto (relación variable-cambio de variable con respecto al tiempo) y la vinculación entre las características de la situación y las gráficas (tipo de cambio en la gráfica de gasto o concavidad en la gráfica de volumen). Estos aspectos influyen y determinan los dos documentos que preparan al coordinador para la puesta en escena del problema: los lineamientos del trabajo en equipo y el guión de la discusión.

Por último dentro de la planeación se debe considerar cuál es **la relación** del problema **con los objetivos educativos**, tomando en cuenta no sólo los aprendizajes que ayuda a comprender sino también los registros que pone en juego y cuál es el aprendizaje en un marco de resolución de problemas.

La planeación del problema puede variar de un grupo a otro y requiere de un conocimiento previo del grupo, aunque también puede estar enfocado a evaluar al grupo. Sin embargo la flexibilidad en la planeación depende en gran medida de la experiencia que el profesor tenga con ese problema o con otros. Los coordinadores deben estar consientes de que la planeación no es exhaustiva

El objetivo de que los participantes estén en una sesión de resolución de problemas es que se apropien de la situación en la que posteriormente se encontrarán sus alumnos cuando ellos funjan como coordinadores, lo que traerá consigo una reflexión acerca de su propia práctica docente. Los momentos principales de la sesión son el trabajo en equipo y la discusión general. Durante la resolución del problema por equipo, los participantes se enfrentarán al problema y tratarán de resolverlo con sus compañeros. Se exige la entrega de un reporte de su solución del problema, lo que, entre otras cosas ayuda a que el equipo llegue a un consenso y a que se organicen. También se les pide que preparen la presentación de su trabajo, en caso de que los coordinadores crean conveniente que lo hagan. Durante la discusión, los participantes validan la solución del problema. Además de que hay implícita una autoevaluación.

Las acciones de los coordinadores no es pasiva ni imperativa, ellos actúan de acuerdo a la planeación del problema y a una serie de creencias que tratarán de transmitir a los participantes poniendo énfasis en que los conocimientos matemáticos se pueden alcanzar a diferentes niveles, por diferentes vías, que puede no ser logrado por algunas personas y que la comprensión no se da “de una vez por todas”.

Este ambiente (de discusión, independencia, toma de decisiones, crítica, participación, autoevaluación, etc) se propone con la entrega de auxiliares para la organización de su aprendizaje, y que sirven como marcos de referencia que se usan y comentan constantemente durante las sesiones de resolución de problemas.

Por último, el participante debe regresar a su papel como docente y, con base en la experiencia ya adquirida, Planear (dentro del taller mismo), Instrumentar, en sus propios grupos, y Evaluar, a veces reportes de sus mismos compañeros, sesiones de resolución de problemas. Al igual que en la anterior perspectiva, se proponen artículos y materiales que se leen, discuten y utilizan durante las sesiones y fuera de ellas.

Conclusiones: El taller se ha ido constituyendo en:

- Un espacio de reflexión al que el profesor asiste por libre elección y en varias ocasiones sorteando dificultades administrativas.
- Un espacio de trabajo matemático, donde los profesores al resolver problemas, discuten, hacen conjeturas, dan y escuchan argumentos, comunican sus resultados.

La resolución de problemas ha permitido a los profesores detectar el nivel de comprensión de algunas técnicas y conceptos matemáticos, al descubrir en contextos específicos su significado, además de ver dónde un determinado concepto, procedimiento o teorema surge naturalmente o puede aplicarse con toda su potencia.

Algunos profesores han ido adquiriendo mayor habilidad para enfrentar los problemas y poco a poco se ha incorporado una mayor atención a todo el contenido matemático que pone en movimiento la resolución del mismo; discutiendo, qué conocimientos, habilidades y actitudes se promueven, así como qué nociones prepara etc.

Ha habido un notorio cambio en relación al uso de la calculadora; al incorporar para las actividades del taller calculadoras graficadoras, los profesores han pasado de un empleo sólo para hacer operaciones elementales a otro que potencia las posibilidades de cálculo, exploración y representación de situaciones a través de gráficas; sobre todo cuando se usan el modo de tabla (tabulación), gráfico y, ahora también en algunas calculadoras, el simbólico.

El taller ha permitido discutir nuestros sistemas de creencias abiertamente en relación con varios asuntos, como son: lo que es la matemática, cómo se enseña, cómo se aprende, la función del profesor y del alumno, la evaluación, etc.

Debemos reconocer que los profesores han participado en el taller con auténtico interés y a pesar de que han manifestado su agrado por la dinámica del taller (que constituye en sí mismo una propuesta didáctica), manifiestan cierta incredulidad de que sea posible llevarla a su salón de clases, de que se pueda aprender matemáticas resolviendo problemas y de que sea viable realizar la planeación requerida para cada problema, en las condiciones actuales de trabajo que se tienen en el IPN.

Podemos afirmar que ha habido un reconocimiento explícito de la enorme complejidad de la función docente en matemáticas, que debemos estar más informados y que en la medida de lo posible debemos incorporar todas las herramientas teóricas y tecnológicas que hagan de nuestro ejercicio una actividad auténticamente profesional.

Por la experiencia que hemos tenido a lo largo de estos talleres, con la participación de más de 200 profesores de los distintos CECyT, y a pesar de la estructura autoritaria de nuestra institución, los bajísimos salarios, el doble discurso de la autoridad que reconoce la necesidad de formación y actualización de los profesores y sin embargo satura de grupos a los maestros, crea una política de incertidumbre para todos los profesores interinos y clausura la posibilidad de obtener horas de base, podemos afirmar que en este momento del Instituto Politécnico Nacional los profesores de matemáticas han rebasado a todo el cuadro de autoridades medias y altas de la institución, con muy honrosas y contadas excepciones, que sólo saben repetir un discurso que no comprenden ni creen.

La concepción docente al inicio del proceso de transformación educativa en la provincia de Jujuy Argentina

Mirta Daino, Ana L. de Perassi, Cecilia Lasserre
FHyCS - Fac. de Ingeniería - Universidad Nacional de Jujuy - Argentina

En la Argentina la "formación inicial" como fase preparatoria formal para el ejercicio de la docencia en el nivel primario se realiza, desde 1969, mayoritariamente en Institutos de nivel terciario no universitario, que constituyen un circuito escolar específico y a la vez diferenciado del que brinda formación para la enseñanza en otros niveles. En Jujuy, se realiza en Institutos Terciarios.

Caracterizamos la etapa de "formación inicial" como "formal", porque entendemos que la formación docente no se inaugura en este momento, sino que la misma incluye influencias de las experiencias vividas en la escolaridad previa, como también las posteriores de su actividad laboral inicial, durante la socialización profesional.

Nuestra Investigación intentaba (año 1992) establecer las relaciones entre la formación docente, las prácticas pedagógicas en el aula y el Documento Curricular (DC) para escuelas primarias, entendiendo que la enseñanza de la matemática en las escuelas primarias constituye un amplio campo en el que tanto sus condicionantes (formación docente, documento curricular, situación socio-institucional), como los actores sociales intervinientes, constituyen sus componentes esenciales.

Para el relevamiento de la información, utilizamos encuestas con preguntas abiertas y cerradas dirigidas a los profesores de los Profesorados, del área matemática, y a los alumnos residentes de los Institutos de Formación Docente (IFD). En el caso de los profesores se trabajó con todos los docentes, de materias relativas al área de las matemáticas de todos los IFD de la provincia; en cambio para los alumnos residentes, la muestra se circunscribió a tres Instituciones, dos de la Capital provincial y una de Palpalá (distante 15 km, de aquella), de distinta tradición histórica, originarias de distintas jurisdicciones, con propuestas curriculares y formas organizativas diferentes, dirigidas a grupos de edad y condiciones laborales también distintas.

Se recogieron datos acerca de lo que piensan ambos colectivos sobre el DC para escuelas primarias de 1978 y los nuevos Contenidos Básicos Comunes (CBC) de 1995 en general y sobre el área de matemática en particular ; sobre la Ley Federal de Educación (1993); sobre la formación docente en general y en particular sobre los contenidos matemáticos; y sobre la calidad de la formación que brinda actualmente la escuela primaria.

Asimismo, se obtuvieron datos sobre la situación laboral y la formación profesional de los Profesores y de los motivos de elección de la carrera en el caso de los alumnos residentes.

Estos datos se contextuaron, para su interpretación en :

- el conocimiento del tipo de organización académica de los IFD, que sólo reconoce la tarea de desarrollo curricular en el aula;
- su dinámica institucional, que puede designarse como endogámica (en tanto que su funcionamiento se plantea como autosuficiente, aislado y autoregulable), tipo de dinámica que pareciera profundizarse proporcionalmente al progresivo deterioro de las condiciones laborales, la desvalorización social del prestigio del que, en otros tiempos, gozara la profesión docente y las demandas y exigencias que desde las políticas educativas gubernamentales se les imponen;
- las historias de las modificaciones de los planes de estudios, donde la participación de los actores involucrados en su generación fue escasa o nula, y donde la finalización de sus aplicaciones obedeció más a razones de política partidista que a cuestiones de políticas académico-curriculares;
- los programas actuales de las asignaturas del área Matemática y Matemática y su didáctica, de fuerte tendencia tecnocrática.

El análisis se centró en las representaciones que sostienen tanto los profesores como los alumnos residentes. ¿Porqué las representaciones? Si seguimos a Postigo de Caffe "Las representaciones funcionan como organizadores tanto del pensamiento como de la acción de los sujetos, condicionando sus relaciones con los otros individuos, las tareas, los procesos y las cosas".

A partir de esto, se consideró que las representaciones se constituyen en el "lugar" de articulación entre el pensamiento y la acción, y de allí su potencial explicativo.

Resultados:

El análisis del discurso de los ALUMNOS RESIDENTES , acerca de las distintas temáticas enunciadas anteriormente, permitió inferir como características de su pensamiento:

1. El ISOMORFISMO entre el "saber" que sostienen que deben poseer los maestros de primaria (que es el que deben aprender ellos durante su formación inicial) y los contenidos a enseñar en la escuela primaria. Dicen:

   "Hay que aprender lo que hay que enseñar ..."

   "Elegí esta carrera porque es corta y fácil"

2. El PRAGMATISMO donde lo prioritario o lo válido es la "formación práctica" entendida ésta como desvinculada y hasta antagónica a la teoría. Esto se visualiza tanto:

a) en la mayor importancia que dan a las materias instrumentales por sobre las de formación básica;

b) La concepción de la didáctica reducida a meras metodologías, al cómo enseñar;

c) la identificación y reducción, de la idea de práctica con "la actividad de enseñar en el aula";

d) la concepción de que el único criterio válido para seleccionar los contenidos matemáticos a enseñar en la escuela primaria es el de que "se pueda aplicar para resolver problemas de la vida diaria";

e) la idea de que las competencias a proponer en el aprendizaje de las matemáticas se demuestran por la eficiencia en la aplicación de algoritmos.

3. Coincidente con 2.a y 2.b, que son complementarios y se refuerzan mutuamente, ya que ambos reconocen la "racionalidad técnica" como supuesto fundante, aparece la concepción de la profesión docente como un accionar reducido al aula, a la manera de un experto en metodologías, y un accionar cuya calidad depende de la "responsabilidad y la voluntad individual" de cada docente.

Esta CONCEPCIÓN TECNOCRATICA del docente y de la educación en la que son formados los futuros docentes, deja librado el rumbo de lo que sucede en el aula y el rumbo de la formación que brindan las escuela al voluntarismo de los maestros, y desde una perspectiva que reduce el trabajo docente a su dimensión técnica, desestimando lo institucional, lo socio-cultural y lo político ideológico.

En este mismo sentido de racionalidad técnica, conciben a la matemática como una ciencia neutral, a-social y a-histórica, que posee unos contenidos incuestionables.

A diferencia de los alumnos residentes, los profesores demuestran una perspectiva crítica respecto del DC, la formación docente, la escuela primaria ... , que analizan desde la dimensión técnico-pedagógica en el contexto de las condiciones laborales,. institucionales y socio-económicas más generales

Conclusiones e Interrogantes:

De acuerdo a lo expuesto, las "conclusiones" en realidad marcan algunos meros interrogantes:

- ¿Cuál es el alcance de la formación docente inicial en su práctica docente posterior?
- ¿Por qué la perspectiva crítica que muestran los profesores no se ha trasmitido/trasmite a los alumnos de los IFD ?
- Específicamente en el área de la matemática, ¿cómo pensar que los futuros maestros podrán suscitar actitudes de indagación, de problematización ... , cuando en su propia experiencia como alumnos residentes no se han visto favorecidos a desarrollar esta actitudes?
- ¿Qué modificaciones reales y en qué dimensiones (contenidos disciplinarios, pedagógicos, actitudinales) producirán las actuales políticas de capacitación docente?. Esto teniendo en cuenta que:

- son impuestas en forma compulsiva, vertical y desde afuera, desconociendo las situaciones institucionales e individuales (expectativas, intereses) de aquellos a quienes están dirigidas;
- abordan sólo los contenidos disciplinares, en cursos cortos, definición que nos remite a pensar si no estaremos en presencia de un nuevo enciclopedismo, donde una vez más se refuerza que el único criterio válido para la selección y organización de los contenidos escolares es el logocéntrico o disciplinar;
- no se acompañan de mejoras en las condiciones laborales y salariales de los docentes, ni de transformaciones reales en la organización y dinámica de las instituciones educativas.

Referencias Bibliográficas:

- **AA.VV.** (1995). *Volver a pensar la educación.* De. Morata,. Madrid.
- **Davini, Ma.** (1995). *La formación docente en cuestión: política y pedagogía.* PAIDOS.
- **Camilloni, A. et al.** (1996). *Corrientes contemporáneas.* PAIDOS, B.A.
- **Postigo de Caffe,C.** (1992). *El fracaso escolar y sus representaciones en una institu ción educativa* – UNJu.

Buscamos la educación matemática que nuestros profesionales necesitan

Marcilla Marta, Holgado Lisa, Rusco Francisca, Veliz Margarita
Universidad Nacional de Tucumán. Argentina

Resumen: Teniendo en cuenta el importante papel que juega la enseñanza de la Matemática en nuestros profesionales, nos propusimos estudiar un conjunto de parámetros que consideramos de interés para medir la calidad de la enseñanza de la Matemática, porque los propios profesionales demandan una actualización que les permita responder a las dificultades reales que encuentran habitualmente en su práctica.

Pretendemos que el relevamiento de opiniones representativas de los diversos actores: egresados, docentes y estudiantes dé una visión de conjunto que ayude al análisis de la realidad actual para sugerir futuras acciones en nuestra universidad que la acerquen al nivel de excelencia que deseamos.

Algunas de las variables que tuvimos en cuenta para medir la eficiencia fueron: asignaturas, materiales y equipos, y apoyo administrativo financiero. Además, para el *Area Docente:* Publicaciones, cursos de especialización y/o actualización, investigación, integración a la estructura curricular y extensión y para el *Area Alumnos:* Rendimiento en cuanto a calificaciones, cantidad de materias aprobadas.

Para la recolección e interpretación de datos estudiamos diferentes Métodos: encuestas,censo,cuestionarios,etc.Sujetos: alumnos, docentes y egresados.

Momentos: el alumno al comienzo y al final de su carrera y finalmente como egresado.

Introducción: Una de las preocupaciones más importantes de las universidades de nuestro país es elevar la calidad de la enseñanza, con el propósito de acercarnos cada vez más al modelo de universidades de excelencia. Con este trabajo pretendemos contribuir a replantear si nuestros profesionales reciben una educación matemática de nivel a fin de que puedan competir y superar las necesidades del medio en el que se desempeñan, respondiendo así a los requerimientos de una sociedad que se encuentra en un continuo proceso de cambio y modernización.

Objetivos: Este trabajo es parte del Proyecto de Investigación "*Evaluación de la Calidad de la Enseñanza de la Matemática en la* U.N.T.", y sus integrantes nos propusimos :

- **Analizar el nivel de conocimientos de Matemática** que poseen los egresados de los últimos diez años.
- **Lograr el mejoramiento de la tarea académica** en el área Matemática a fin de que sea óptima.
- **Valorar el intercambio de experiencias** como fuente de aprendizaje.
- **Lograr la toma de conciencia de los docentes** a partir de los resultados obtenidos.

- **Seleccionar cuidadosamente la o las variables o parámetros** que servirán para medir la calidad del proceso.
- **Establecer una metodología de trabajo** para describir la situación de la naturaleza que nos ocupa estudiar.
- **Formular propuestas de solución** a partir de los datos obtenidos.

Marco metodológico*:* este proyecto se enmarca dentro de las características de una investigación evaluativa, donde se combinan métodos cuantitativos y cualitativos, ya que ambos pueden vigorizarse mutuamente para brindar percepciones que ninguno de los dos podría conseguir en forma independiente.

Tanto para la recolección como para la interpretación de datos hemos utilizado:

Métodos: encuestas, censo, cuestionarios, etc.

Sujetos: alumnos, docentes, egresados.

Momentos: el alumno al comienzo de su carrera, al culminar la misma y como egresado.

Las ***variables*** *que consideramos para medir la eficiencia son:*

Para el Area Docente

- Publicaciones
- Cursos de especialización y/o actualización
- Investigación
- Integración a la estructura curricular
- Extensión

Para el Area Alumnos:

- Rendimiento en cuanto a calificaciones
- Cantidad de materias aprobadas

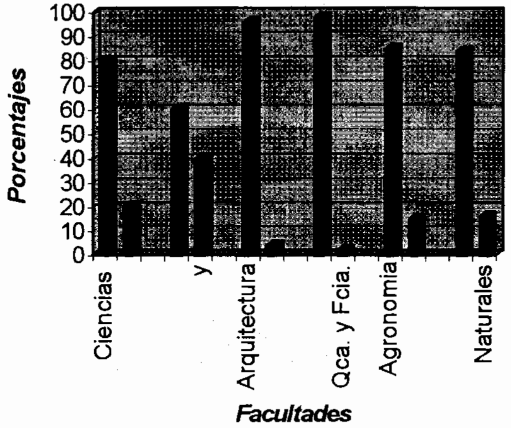
Hasta el momento:

- Se realizó y procesó el censo a docentes , las encuestas a los estudiantes de los primeros años y la encuesta a los egresados.
- Estamos realizando las encuestas a los alumnos del último curso.

Resultados: de la encuesta efectuada a los egresados, y a los alumnos de los primeros cursos consideramos interesante destacar lo siguiente:

Opinan los egresados:

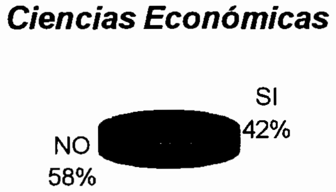
Los conceptos de Matemática adquiridos en la Universidad, ¿fueron suficientes para el ejercicio profesional?

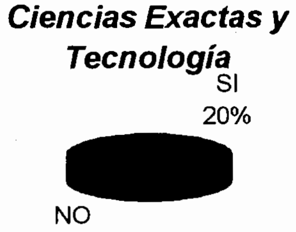


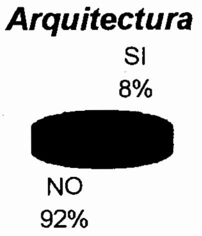
En general, los conceptos más solicitados por nuestros profesionales para agregarse a las curriculas respectivas son los de Estadística y Algebra Lineal

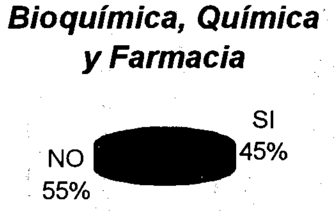
Opinan los alumnos:

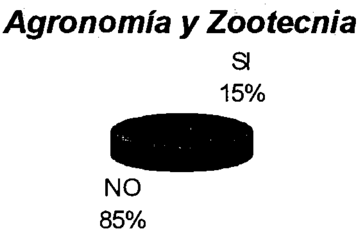
¿Necesitó recurrir a profesores particulares para aprobar las asignaturas de Matemática?

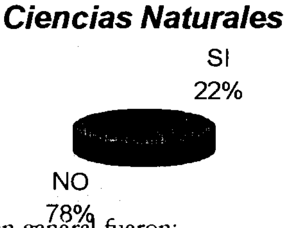












Los motivos expuestos en general fueron:

- Mala formación adquirida en el nivel medio.
- Falta de motivación por parte de algunos docentes.
- Falta de voluntad para enfrentar solos las situaciones problemáticas.

Conclusiones:

- Nuestra opinión es que una de las principales direcciones en las que se debe trabajar en Matemática, es conseguir un proceso de enseñanza más participativo, donde se logre la capacidad de aprender más que enseñar conocimientos y donde las aplicaciones (que luego deberá enfrentar el futuro profesional) ocupen un espacio importante en los contenidos.
- Teniendo en cuenta los resultados del procesamiento de la información obtenida a través del censo realizado a los docentes: Un porcentaje muy bajo tiene "título docente" (lo que en general no contribuye a la mejor preparación pedagógica que demandan nuestros egresados) y un porcentaje muy alto usa metodologías obsoletas.
- Concluimos que se deben implementar cursos de pedagogía y didáctica para docentes universitarios a fin de que comience a revertirse lo que consideramos que no ha alcanzado el nivel óptimo.

- La docencia de nuestra disciplina debe ser formadora y no meramente informadora.
- Es necesaria la actualización permanente para poder responder a los cambios que la tecnología actual nos impone aceleradamente.

Referencias Bibliográficas:

- **Braga, I.** (1987) - *"¿Ingresan los alumnos en la Universidad con un adecuado desarrollo de los niveles de razonamiento?"*-
- **Bruera, R.** (1992) - *" La Evaluación Institucional"*
- **Cook y Reichardt** (1986) - *"Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa".* MORATA, Madrid.
- **Díaz, A.** (1994) - *"La evaluación universitaria en el contexto del pensamiento neoliberal"* , en Universidad y Evaluación. Estado del debate - Aique Grupo Editor - Bs. As.
- **Espinoza, O.; González0 L.; Pobletel, A.** (1994) y otros - *"Autoevaluación para Instituciones de Educación Superior"* - CINDA / PROMESUP - OEA.
- **Padua, J.** (1993) - *"Técnicas de Investigación aplicadas a las Ciencias Sociales"*- México.

Taller: Matemática Hoy

Mirta Teresa Torruella
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca
Argentina

El Taller Matemática Hoy, luego de una breve introducción, se desarrolló en tres sesiones. La primera de ellas se centro en Perspectivas Actuales frente a Métodos Activos en Enseñanza - Aprendizaje.

En una segunda sesión, con debate guiado, se solicitó a los docentes participantes, reunidos en pequeños grupos de trabajo, se expidieran exponiendo vías plausibles de respuesta y solución a las problemáticas planteadas, así como también propuestas, opiniones, puntos de vista y nuevas ideas, conclusiones que fueron presentadas al finalizar el debate por los moderadores de cada uno de los grupos de trabajo y reflexión.

Luego de una tercera sesión en torno al tema Rendimiento y Desarrollo de habilidades, se logró la elaboración de una reflexión final, en base al trabajo intergrupal, y una síntesis de las conclusiones y propuestas presentadas.

Se hicieron acuerdos de trabajos a futuro en base a los grupos allí formados y se convino un fluido intercambio de material, así como también la necesidad de presentación de mini talleres y cursos cortos en base a estas temáticas en encuentros previos a la próxima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa a realizarse en Colombia.

Abrió debate y participación la Profesora Mirta Torruella con consideraciones acera de la actitud del Estudiante, hacia la Matemática. técnicas participativas, espacios y tiempo en el aprendizaje de la Matemática, etc. :

Los docentes de todo el mundo tenemos conciencia de que enseñanza y aprendizaje, íntimamente ligados, están en permanente relación, constituyéndose en un proceso, en un constante movimiento y acomodamiento de múltiples factores. En una adaptación constante a las circunstancias que determinan el quehacer en el aula, se producen transformaciones múltiples, aprovechables para generar el clima propicio tendiente a la gestación, desarrollo armonioso y retrodimentación del aprendizaje. Educador y educando constituyen un equipo de trabajo con características que le son propias. Es necesario concientizarse de un sinnúmero de detalles y sutilezas esenciales a la hora de enriquecer la calidad del proceso enseñanza - aprendizaje.

Ante el bagage de todo lo nuevo, comienza a desplegarse ante el alumno un abanico de posibilidades que a veces libera y esclarece y otras confunde, no por no ser correctamente ofrecido, sino por la misma resistencia al cambio y temor que provoca todo lo nuevo hasta que comienza a ser asimilado y adecuadamente elaborado, sobretodo en nuestra asignatura: Matemática. Es necesario pues observar detenidamente al alumno, captar sus inquietudes, atender sus necesidades, captar sus actitudes, reacciones. A medida que impartimos conocimientos, no sólo debemos enfocar a lo conceptual sino tratar de atender los aspectos actitudinales para un mejor desarrollo de aptitudes. Un enfoque orientado a los intereses del estudiante, estimula su motivación por la asignatura trasuntando los conceptos aprehendidos en un verdadero aprendizaje significativo. Debemos estar atentos a las sutilezas del conjunto de estudiantes que constituyen en cada momento nuestra clase y estar atentos a las "devoluciones" de nuestros alumnos frente a los conocimientos que impartimos. Tener una visión completa y global de lo que realmente significa esa interacción. Debemos cuidar el desarrollo de las clases, considerando la forma en que impartimos los conocimientos sobre una cuestión de fondo: nunca desestimar las características del grupo humano de quienes representan nuestro alumnado en cada momento y lugar. Es necesario prestar atención a los ritmos de captación y trabajo respetando la diversidad.

Es un reto constante para el profesor de matemática lograr un equilibrio óptimo entre formalidad y apertura, entre el utilizar debidamente las herramientas racionales, combinando la visión tradicional con enfoques renovadores del pensamiento científico y el despertar de señales creativas de la mente orientándola a superiores niveles de utilización y aprovechamiento.

A continuación las opiniones y reflexiones de los docentes asistentes, ofrecieron un aporte interesante a las temáticas tratadas:

- Considero que el cambio de actitud en los alumnos es un elemento importante de medición para evaluar la marcha del aprendizaje. Es esencial que exista una buena comunicación entre docentes y alumnos y debemos ocuparnos de eliminar barreras que no permitan una excelente comunicación y un buen clima de trabajo. el alumno es importante, pues a él va dirigida nuestra enseñanza, y todos lo son por igual, no sólo los más adelantados, sino también los que "rotulamos" como malos. Debemos tratar de poner atención a todos los alumnos, hacer un buen tratamiento de la diversidad en el aula, para rescatar también a los menos aventajados y lograr que trabajen y que no aborden la Matemática como algo imposible o destinado a unos pocos. No ver a la clase con esa visión parcial como un bloque que nos está atendiendo, sino como un conjunto de alumnos con distintas características aprovechables para un trabajo de equipo.
- Es un enfoque interesante que puede contribuir grandemente a desterrar esas imágenes tan formadas y arraigadas desde hace tanto tiempo, del profesor de matemática como nuevo transmisor de conocimientos o de las clases tan expositivas y la imagen de la Matemática sólo reservada a unos pocos con características especiales .Creo que es importantísimo tratar de lograr de que el alumno sea protagonista de su propia enseñanza y debemos capacitarnos, para una buena labor, en saber observar cada día más al alumno a medida que enseñamos. Eso refuerza vínculos y crea un mejor clima revirtiendo bloqueos y preconceptos acerca de las clases de matemática.

- Sí, opino que es hora que despertemos y retomemos nuestro quehacer conscientes de la necesidad de un cambio de actitudes. La era actual nos plantea un reto al cambio. Dejar definitivamente de lado al profesor que únicamente se dedica a la enseñanza como un simple transmisor, a la usanza tradicional.
- Debemos lograr que el alumno participe en la gestación de las clases, acrecentando la creatividad y la movilización de cualidades que a veces tenemos dormidas, pero que debemos activarlas. Es importante centrar nuestros objetivos en ello. Si afirmamos esa posición, podremos decir que a partir de hoy nos dedicamos de manera distinta a la educación. Abordamos el trabajo de siempre , pero con una mentalidad totalmente diferente.
- Es bueno considerar al alumno como un potencial investigador independiente. Nos parece acertado revalorizar el protagonismo del alumnado en el aula y fuera de ella y la orientación de la motivación hacia la investigación educativa, hacia el detectar los distinto modos de abordar el saber, sin descuidar que tenemos distintas individualidades en la clase con antecedentes académicos y conocimientos previos distintos. Tratar en lo posible de impartir las clases de modo que cada alumno adapta las enseñanzas de acuerdo a su nivel cognoscitivo es sin duda una habilidad que debemos desarrollar al máximo los docentes de hoy, en Matemática, debe ser uno de nuestros centrales y más firmes propósitos el dar la oportunidad a los alumnos de que sus propios intereses los motiven a estudiar los temas y a investigar. Así lograremos adeptos a la enseñanza y al aprender, con una activación integradora natural y no forzada.
- Opinamos que esta postura tiende a respetar naturalmente diferencias y a alentar el progreso y contribuye a que la Matemática no sea vista como factor de frustración o de fracaso escolar para gran parte del alumnado. Depende mucho del cuidado que ponga en esto el docente y de la habilidad que haya desarrollado hasta el presente en este sentido. Es decir también esto forma parte importante de las clases. no descuidar estas cuestiones es fundamental.

Agrega la profesora Torruella: existe un bagage de elementos interiores "esperando" cobrar forma en el exterior. En cada alumno un universo potencial interior que es necesario descubrir y trabajar y los profesores debemos estar atentos a ello a pesar de nuestras limitaciones: relación tiempo - programa académico, profesores de tiempo completo y otros no, cursos excesivamente numerosos.

Somos conscientes de los numerosos impedimentos que a diario deslucen nuestro accionar y el de nuestros alumnos y se constituyen en importantes trabas para una tarea fructífera. Por eso debemos orientar el rumbo de la enseñanza - aprendizaje minuto a minuto aprovechando y activando actitudes positivas.

- Pensamos que ese aspecto es importante. no sólo ser conocedor de la materia, sino de los impedimentos y posibilidades y es importante también como elemento altamente motivador que los alumnos puedan ver al profesor de Matemática como un profesional sensible a sus necesidades y a alguien que demuestra interés en el trabajo realizado por los estudiantes, no solamente en forma proporcional a la calidad de las tareas desarrolladas. Que el docente no subestime el trabajo de sus alumnos es un importante punto de partida para separar lo que nos sirve y afianzar lo que sirve y continuar creciendo.
- Ese sentido de aprovechamiento de todas las posibilidades es positivo y despierta a la motivación y a la creatividad. Hay alumnos que no tienen base y si se los estimula "sacan" los problemas, a veces intuitivamente. Se dan cuenta, se orientan hacia la solución, aunque sin "elementos matemáticos", sin base. A eso hay que valorarlo y considerarlo, pues acrecienta la autoestima del alumno y la predisposición a la materia.

Mirta Teresa Torruella: Sí, es un punto importante. Esos alumnos pueden ser potencialmente matemáticos, pueden tener condiciones para investigar y estudiar matemática. Quizás tengan una mala base, como opinó el grupo, y piensen que no tienen habilidad o y inteligencia para la materia, pero cuando comienzan a trabajar activamente aunque sea de esa manera intuitiva, se automotivan, y como se señaló, aumentan su autoestima y lo más importante, se revierte "su actitud", pues comienzan a sentir la necesidad de "conocer más" para resolver mejor o para investigar mejor. Sienten la necesidad de "tener una buena base" para desenvolverse mejor. A veces presentan demostraciones y/o resoluciones novedosas, originales y son muy creativos.

Ese aspecto lo tenemos que tener muy en cuenta los profesores, el destinar un espacio, un lugar a este tipo de desarrollo en nuestros alumnos. Se han dado casos en que el fomentar ese tipo de abordaje intuitivo los ha convertido, a posteriori, en entusiastas investigadores y en importantes agentes multiplicadores e innovadores en los equipos de trabajo. Pueden desarrollarse nuestra mente y nuestro espíritu, muy especialmente a través de la Matemática. Esto no implica necesariamente quitar rigor a los razonamientos. no es para nada subestimar el pensamiento científico racional, sino más bien destinar un significativo lugar a los aspectos creativo e intuitivo de la mente, considerándolos magníficos complementos de aquél y configuradores de un conocimiento global. Es necesario atender a los múltiples matices del desenvolvimiento humano sin dejar el aspecto creativo e innovador relegado a un segundo plano. Observación, razonamiento, análisis, intuición, creatividad, van ensamblados en todas las disciplinas y hay que trabajarlos en conjunto a fin de ampliar y flexibilizar la mente y favorecer un crecimiento personal armonioso .

Referencias Bibliográficas:

- **Delgado, J.** (1995): *"Algunas consideraciones sobre el perfeccionamiento de la disciplina Matemática en la carrera de Ingeniería Industrial.* COMAT. Matanzas
- **Torruella, T.** (1996): *"Innovación en el Enfoque Matemático"* II Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. La Habana . Cuba.
- **Torruella, T.** (1996): *"Matemática Intuitiva"*. Universidad del Norte Chilenas. COMCA VI . Iquique . Chile.

CURRICULUM

Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional

Luis Rico, Universidad de Granada (España)

En su acepción educativa el concepto de currículo denomina toda actividad que organiza y lleva a cabo un plan de formación. El Currículo de Matemáticas para la Educación Obligatoria es la denominación de todas las actuaciones que integran conjuntamente el plan de formación en matemáticas para los niños y jóvenes de un país, cuya responsabilidad de realización corresponde a los profesores. El profesor de matemáticas necesita conocimientos sólidos sobre los fundamentos teóricos del currículo de su disciplina, sin los cuales ve limitadas sus funciones a las de mero ejecutor de un campo de decisiones cuya coherencia y lógica no domina e, incluso, a veces, no entiende.

El currículo de Matemáticas para la Educación Obligatoria es un plan de formación, que se propone dar respuesta a las siguientes cuestiones:

> ¿Qué es, en qué consiste el conocimiento matemático?
>
> ¿Qué es el aprendizaje? ¿cómo se caracteriza el aprendizaje de las matemáticas?
>
> ¿Qué es la enseñanza? ¿en qué consiste la educación matemática?
>
> ¿Qué es, en qué consiste el conocimiento útil? ¿cómo se evalúa el conocimiento matemático?

Estas cuatro cuestiones permiten establecer cuatro dimensiones en torno a las que organizar los niveles de reflexión curricular. Cada una de estas dimensiones puede estudiarse desde diversos niveles; uno de ellos lo establecen las finalidades de la enseñanza de las matemáticas. Igualmente se pueden considerar los niveles de planificación para el aula y para el sistema educativo.

La funcionalidad del concepto de curriculo se ha desarrollado mediante la búsqueda sistemática de niveles de reflexión, estableciendo componentes por cada nivel y relaciones entre las componentes de diferentes niveles. De esta manera han surgido relaciones entre los diferentes niveles y se ha dado cauce al análisis que se deriva del concepto de currículo establecido por sus cuatro dimensiones.

Desde la perspectiva de las necesidades profesionales, del trabajo cotidiano del profesor, de sus preocupaciones y problemas y del ejercicio de su responsabilidad, el núcleo de estudios sobre el currículo es fuente de reflexiones y debates, cuya procedencia es doble:

- la complejidad conceptual e ideológica con la que se presenta la educación en las sociedades modernas,
- la necesidad de disponer de medios técnicos adecuados para actuar eficazmente en el sistema educativo.

El profesor de matemáticas necesita autonomía intelectual y capacidad crítica para el ejercicio de su profesión; para desarrollar estas capacidades es imprescindible conocer las funciones básicas que se llevan a cabo mediante las herramientas conceptuales de su profesión. De ahí la necesidad de entender y controlar el concepto de currículo y su complejidad. Esta reflexión se lleva a término con un objetivo principal: poner a disposición de los profesores de matemáticas un concepto sólido y útil de currículo, que sirva para profundizar y mejorar su actividad profesional.

En el currículo convencional el conocimiento matemático se fundamenta en dos significados prioritarios. En primer lugar, predomina el carácter de verdad necesaria del conocimiento matemático, basado en enunciados y estructuras formales y sostenido por argumentos y razonamientos lógicos (significación formal). En segundo lugar, considera la interpretación de las dificultades de aprendizaje de las estructuras formales por parte de los jóvenes y el diagnóstico y tratamiento de los errores usuales en el proceso de aprendizaje (significación cognitiva). A los modos tradicionales de entender, intepretar y utilizar el conocimiento matemático nuestra reflexión curricular añade nuevas opciones.. Destacamos algunas de ellas.

La consideración histórica del conocimiento matemático presenta éste como contingente, sometido a cambios, producto de la cultura de cada época, construído por personas que establecen los conceptos al asignar significados compartidos. La significación histórica no está desarrollada suficientemente en nuestro currículo, pero incorpora una nueva perspectiva sobre el conocimiento matemático.

La conexión permanente del conocimiento matemático con los fenómenos de los que ha surgido y a los que proporciona cierta estructura y organización es otro modo de significación al que llamamos, siguiendo a Freudenthal, fenomenología didáctica. El análisis fenomenológico de los conceptos matemáticos organiza todo un conjunto de contextos, situaciones o aproximaciones disciplinares que proporcionan sentido real y práctico a cada estructura formal, permitiendo ejemplificaciones y detectando problemas. Los nuevos currículos se proponen destacar la significación fenomenológica como modo importante de entender el conocimiento matemático.

El énfasis puesto en la naturaleza representacional de los conceptos y procedimientos matemáticos es también otro aspecto relevante. La necesidad de distinguir entre una estructura matemática y los sistemas de representación mediante los que se expresa lleva a analizar las limitaciones que tiene cada sistema para transmitir en toda su riqueza la estructura o concepto considerados, la pluralidad de sistemas disponibles para cada estructura y las necesarias conexiones entre ellos. El significado semiótico es una aproximación potente a la hora de estructurar el complejo juego de relaciones que subyacen en una estructura matemática y dar forma a la riqueza que encierra.

No se agotan aquí las propuestas de nuevos significados para el conocimiento matemático en el currículo de la educación obligatoria. A la organización disciplinar y a la organización cognitiva, propias de los currículos tradicionales, nuestra reflexión se propone añadir nuevos organizadores, nuevos modos de proporcionar significado al conocimiento matemático.

La idea de organizador la hemos desarrollado extensamente en un trabajo reciente dedicado a su estudio. Resumimos aquí algunas de sus principales características.

Vamos a llamar *organizadores* a aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación del currículo. Hablamos así de organizadores del currículo. Una condición exigida para aceptar un tipo de conocimientos como organizador del currículo de matemáticas debe ser su carácter objetivo y la diversidad de opciones que genere. Un organizador debe ofrecer un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas, un espacio de reflexión que muestre la complejidad de los procesos de trasmisión y construcción del conocimiento matemático y unos criterios para abordar y controlar esa complejidad. Los organizadores deben mostrar su potencialidad para establecer distintos marcos de estructuración de las unidades didácticas, con una base objetiva de interpretación y discusión, para producir nuevos significados. Los organizadores han de ubicar las distintas opciones de los profesores para la planificación, gestión y evaluación de unidades didácticas y han de situar estas opciones en unas referencias comunes que permitan precisar las coincidencias y las discrepancias. Los organizadores deben tener una base disciplinar adecuada que permita su tratamiento objetivo. El conocimiento didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo de matemáticas ha de quedar estructurado mediante la aportación que hacen cada uno de los organizadores a dicho contenido.

Los organizadores proporcionan un marco más amplio para la enseñanza de las matemáticas, establecen una mayor riqueza de significados para el conocimiento matemático y ofrecen una mejor aproximación para el aprendizaje de los escolares.

Pero también los organizadores plantean nuevos problemas al profesorado. La complejidad derivada de su consideración conjunta, la falta de experiencia para diseñar unidades didácticas en base a estos modos de significar, la inexistencia de bibliografía específica y de modelos que ejemplifiquen estas propuestas, son algunos de los rasgos que nos llevan a plantearnos las carencias en la formación inicial del profesor de matemáticas de Secundaria.

Programa de reformulación de licenciaturas para maestros en servicio: el curso "los problemas matemáticos en la escuela" de la licenciatura en educación, plan 1994 de UPN

Oscar Jesús San Martín Sicre. Universidad Pedagógica Nacional
José Ramón Jiménez Rodríguez. Universidad de Sonora

El nuevo enfoque para el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática, explicitado en los Planes y Programas de Estudio de la SEP para 1993 y en los paquetes didácticos asignados a la educación básica primaria, determina la necesidad educativa de un tipo de práctica docente, donde el conocimiento matemático sea construido por niños y maestros al interior del aula escolar por medio de diversos recursos.

Uno de los más importantes de estos recursos, lo constituye precisamente la resolución de problemas como instrumento fundamental para la enseñanza-aprendizaje de la matemática escolar.

Como resultado de estas consideraciones, y tomando en cuenta diversos diagnósticos previos realizados en el país, se infirió la existencia de un serio problema educativo, a saber, el problema de que la gran mayoría de los maestros de educación primaria actualmente en servicio, habían sido formados para un tipo de práctica docente donde se asumía que el conocimiento se transmite dentro del aula.

Para responder a estos nuevos problemas educativos, en la Licenciatura en Educación Plan 1994 de la Universidad Pedagógica Nacional, se diseñaron y elaboraron dos cursos que se denominan "Construcción del conocimiento matemático en la escuela" y "Los problemas matemáticos en la escuela" del que nos ocupamos a continuación.

El curso "Los problemas matemáticos en la escuela" ha sido concebido con el propósito de aportar al profesor-alumno diversos elementos teóricos, conceptuales, metodológicos y didácticos que contribuyen a la formación y actualización del maestro dentro de una perspectiva constructivista adecuada a los nuevos enfoques didácticos.

Sin embargo, pretendiendo enriquecer la formación del profesor-alumno y dotarlo de elementos de análisis que le permitan confrontar diversas ideas y posiciones didácticas, e innovar y transformar su práctica docente, se consideran también, aunque brevemente algunas otras perspectivas teóricas y metodológicas relacionadas con la resolución de problemas, tales como las de la enseñanza problemática, la Gestalt y los trabajos de G. Polya y A. Schoenfeld.

El curso contiene como materiales de apoyo una antología básica que contiene lo que podríamos denominar "el mínimo académico de lecturas" necesario para tener una idea aceptable del tema, una antología complementaria donde se profundiza, se complementa o se recuperan otros enfoques diversos, una guía de estudio y actividades de aprendizaje para el estudiante, y una guía para el asesor, esta última en realidad constituye una propuesta para que el asesor de la UPN de manera congruente a lo implicado en el nuevo enfoque, desarrolle y practique su asesoría de manera constructivista.

Se describen brevemente a continuación la estructura y propósitos asociados a la asignatura:

EL CURSO "LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN LA ESCUELA" DE LA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN, PLAN 1994, DE LA UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Para diseñar este curso se ha tomado como premisa fundamental la concepción constructivista de considerar a los problemas como motores, motivadores o desencadenadores del proceso de construcción de conocimiento al interior del aula escolar.

El propósito general del curso requiere que:

"El profesor-alumno conozca y adquiera habilidades y elementos conceptuales, teóricos, metodológicos y didácticos relacionados con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas, mismos que propiciarán el análisis, resignificación, transformación e innovación de su práctica docente".

El curso se ha dividido en tres unidades y cada unidad contiene cuatro temas:

Las unidades, sus propósitos y los temas que las integran se describen a continuación:

UNIDAD 1. MARCOS REFERENCIALES PARA EL ESTUDIO DE LOS PROBLEMAS.

Propósito: El profesor-alumno conocerá marcos de referencia con respecto a los problemas y sus procesos de resolución, que le posibiliten la puesta en común de nociones iniciales, un estudio sistemático y objetivo, y la comprensión y resignificación de saberes y procesos al interior de su práctica docente.

Tema 1. Saberes previos del profesor-alumno sobre problemas y resolución de problemas.

Tema 2. Concepto y función de los problemas en la escuela.

Tema 3. Los problemas en el constructivismo.

Tema 4. La enseñanza problémica.

UNIDAD 2. CONSTRUCTIVISMO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. BASES PSICOPEDAGÓGICAS.

Antes de describir el propósito y temas que integran la segunda unidad, se ha considerado pertinente explicitar aquí, que el conjunto de bases psicopedagógicas asociadas al constructivismo resultaba muy amplio, y que el tiempo asignado en el programa, al estudio de este tema era relativamente restringido, y esto obligó a los diseñadores del curso a seleccionar, para su presentación en las antologías, aquellos fundamentos teóricos que revestían un carácter general, y que además mostraban una explícita relación con la propuesta constructivista de la SEP.

Propósito: El profesor-alumno conocerá y se apropiará de un conjunto de bases psicopedagógicas que aporta el constructivismo a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas.

Tema 1. Psicología y didáctica de J. Piaget.

Tema 2. Conocimiento previo, escolarizado y no escolarizado en la resolución de problemas.

Tema 3. Aprendizaje por descubrimiento.

Tema 4. Interacción social.

UNIDAD 3. RECURSOS DIDÁCTICOS Y METODOLÓGICOS EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS POR MEDIO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Es necesario explicitar aquí que en el curso, al llegar a este punto de avance, se explicita que existen diferencias conceptuales entre "enseñanza de la matemática por medio de la resolución de problemas" y "enseñanza de la resolución de problemas".

Propósito: El profesor-alumno conocerá y aplicará un conjunto de recursos didácticos y metodológicos utilizados en la enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas.

Tema 1. Cálculo mental y estimación en la escuela primaria.

Tema 2. La calculadora en la escuela primaria.

Tema 3. Los heurísticos de Polya y Schoenfeld en la resolución de problemas.

Tema 4. Recuperación de elementos conceptuales, teóricos, metodológicos y didácticos en la resolución de problemas: Un ejemplo ilustrativo.

La bibliografía básica que se utilizó para seleccionar los artículos y lecturas de las antologías es la siguiente:

Referencias bibliográficas:

- **Aebli, H.** (1958). *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*. Buenos Aires, Ed. Kapelusz.
- **Ausubel, D. et. al.** (1991). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México, Ed. Trillas.
- **Ávila, A.** (1994). *Los niños también cuentan*. México, SEP.
- **Block, D. et. al.** (1995). *Revista Educación Matemática*. Vol. 7. No.3. México, Grupo Editorial Iberoamérica.
- **Garton, A.** (1994). *Interacción social y desarrollo del lenguaje y la cognición*. Barcelona, Ed. Paidós.
- **Gómez, C. y Coll, C.** (1994). *Cuadernos de Pedagogía*. No. 221. Barcelona.
- **Jiménez, J.** (1991). *Revista Educación Matemática*. Vol. 3. No. 1, México, Grupo Editorial Iberoamérica.
- **Universidad Pedagógica Nacional**. (1987). *Matemáticas I*. México, SEP.

El papel del profesor dentro de la ingeniería didáctica

José Armando Albert Huerta, Sandra Areli Saldaña Ibarra
Universidad Cristóbal Colón, Veracruz

El Papel del profesor desde la perspectiva constructivista es más compleja que la de su colega tradicional, puesto que *debe diseñar y presentar situaciones* que, apelando a las estructuras anteriores que el estudiante dispone, le permitan asimilar y acomodar nuevos significados del objeto de aprendizaje y nuevas operaciones asociadas a él, con el fin que pueda construir, verbalizar, justificar y negociar, a través de la confrontación y argumentación, sus construcciones con otros estudiantes, textos y con el propio profesor.

El profesor constructivista[1] ha de procurar realizar una combinación de la transmisión de teorías y concepciones con la realización de actividades por descubrimiento, intentando que los estudiantes hagan conciencia de sus concepciones, que se les genere conflictos cognitivos ya que estos le permitirán darse cuenta de las limitaciones que tienen.

La ingeniería didáctica se fundamenta en el constructivismo, y el papel del profesor dentro de ésta consiste principalmente en:[2]

1. Organizar la situación didáctica de modo que el conocimiento sea plantado como un objeto de enseñanza de forma tal que pueda ser adquirido bajo su dirección en el proceso de aprendizaje.
2. Permitir a los estudiantes aceptar la responsabilidad de resolver el problema propuesto en situación a-didáctica, que desarrolle un proceso de confrontación y argumentación.
3. Unir las adquisiciones desarrolladas durante el proceso de solución al conocimiento institucional, a través de una fase de institucionalización.

Con relación al papel del profesor dentro de la Ingeniería Didáctica, Artigue (1995)[3] comenta que el profesor está poco presente en el análisis a priori. Este hecho tiene razones históricas evidentes, si se considera el desarrollo de la investigación didáctica donde la primera urgencia fue restituir el lugar del alumno. En este desarrollo naciente de la didáctica, que imponía de antemano una limitación relativamente estricta a la complejidad susceptible de ser abordada científicamente, el profesor tuvo que pagar de alguna manera el precio de que el estudiante se le haya dado prioridad en el del modelaje y la teoría. De tal forma, no es coincidencia que, si bien las situaciones de acción, formulación y validación se hicieron presentes desde los primeros embriones de la teoría de las situaciones, las situaciones de institucionalización se introdujeron mucho más tarde, ya que no se prestaban al modelaje usual de las situaciones. De ahí que se convirtieran en fases de

[1] Pozo, J. (1987). *Aprendizaje de la ciencia y pensamiento causal.* Madrid: Aprendizaje Visor.

[2] Albert, Huerta J. Armando. (1996). *La convergencia de series en el nivel superior. Una aproximación sistémica.* Tesis doctoral, p. 57. México: CINVESTAV-ME.

[3] Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática, pp. 35-39. México: "Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamericana.

institucionalización, es decir, los momentos donde un análisis en función del juego del profesor debe necesariamente redireccionarse con el análisis desde el punto de vista del juego del estudiante.

En el análisis a priori no se le ha otorgado tradicionalmente un lugar al juegc del profesor. Aunque el estudiante se toma en cuenta en un doble nivel descriptivo y predictivo, el profesor no interviene sino en un nive descriptivo, como si la situación lo determinara por completo como actoı del sistema.

De alguna manera, la noción de contrato didáctico permite recuperar en parte al profesor como actor de tiempo completo en el sistema. Sin embargo, no se puede negar que hasta el momento el profesor ocupa siempre un papel marginal en la teorización didáctica. Entonces como no se le puede considerar apropiadamente, los fenómenos didácticos que lo involucran tienden a percibirse como ruidos en relación con el funcionamiento cuyo estudio se privilegia: aquel de las relaciones estudiante/medio con respecto al saber.

Farfán (1995)[4] comenta que, en efecto, el marco teórico no ha considerado totalmente al profesor como un actor inmerso en la situación en la misma forma que el estudiante, la modelización se centra sobre las relaciones del estudiante con el conocimiento.

Por otra parte, en los últimos eventos de la Reunión centroamericana y del caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa puede constatarse una ausencia de estudios sobre el papel del profesor en el nivel universitario. Sin embargo, en las más recientes reuniones, se comienza a definir una línea de investigación al respecto. Tal el caso del rubro *formación de profesores* en al VIII Reunión[5] y *formación y actualización de profesores* en la X Reunión[6]. Sin embargo, todavía los trabajos van dirigidos hacia la capacitación del profesor y no a investigarle como objeto de estudio. Es por eso que se hace necesario ahondar en uno de los tres pilares de la didáctica: el profesor.

El proceso experimental de la Ingeniería Didáctica está integrada por las siguientes fases: análisis preliminar, diseño de la secuencia y análisis *a priori*, experimentación, análisis *a posteriori* y validación.

En el análisis preliminar se detectan y analizan aquellas restricciones o vínculos a partir de distinguir tres dimensiones: *epistemológica, cognitiva y didáctica.*

---

[4] Farfán, Rosa Ma. (1995). *Ingeniería Didáctica:*, p. 14. México: Programa Editorial Serie: Artículos Área de educación superior Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN. México,

[5] VIII Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, San José de Costa Rica, 1994.

[6] Décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, Puerto Rico, 1996.

El análisis *a priori* debe concebirse como un análisis de control de significado: La teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos, a través de la interacción con un medio determinado dado que la teoría de las situaciones didácticas, que sirve de referencia a la metodología de la Ingeniería Didáctica, ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado del conocimiento y las situaciones didácticas.

El objetivo del análisis *a priori* de una secuencia didáctica es determinar de la misma forma en qué o cómo las selecciones locales y globales hechas pueden lograr un control interno de los significados del estudiante. Se basa en un conjunto de hipótesis y su validación está indirectamente en juego en la confrontación llevada a cabo entre el análisis a priori y a posteriori. Se centra en las características de una situación adidáctica que se ha querido diseñar y se trata de llevar a los estudiantes. Por lo tanto, comprende una *parte descriptiva* que incluye los puntos de la situación, por ejemplo: se describen las selecciones locales relacionándolas eventualmente con aquellas elecciones didácticas globales, y las características resultantes de la secuencia didáctica que de ella se desprende. Posteriormente, se analiza qué podría ser lo que está en juego en esta secuencia para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puestas en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor para así pasar a la *parte predictiva* que representa un intento por aclarar en base a las características anteriores los riesgos reales de la situación para los alumnos: se prevén los campos o tipos de comportamiento posibles de aparecer y el significado que podría ser dado a éstos procurando demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado para el aprendizaje y que la secuencia intentaba desarrollar.

El análisis *a priori* hasta el momento ha sido principalmente adidáctico y si una parte esencial de los procesos pertinentes se escapan al registro entonces, se cuestiona la forma para su validación y la manera en qué permitirá captar fenómenos didácticos en dichas situaciones.

La fase de experimentación es la puesta en práctica de los propósitos del diseño. A ésta le sigue un *análisis a posteriori* que se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de trabajo de los estudiantes en clase o fuera de ella. Hemos de recordar que es, en la confrontación de este análisis con el *a priori* donde se fundamenta en esencia, la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

Hemos hecho varios estudios a través de la ingeniería didáctica en situación escolar: el primero de ellos es una serie de secuencias didácticas en estudiantes de varias licenciaturas (sistemas computacionales, economía, contaduría e ingeniería industrial) con el fin de explorar las nociones relacionadas con las series numéricas y su convergencia. Esta investigación permitió identificar ciertas regularidades referentes a obstáculos epistemológicos[7]. En ésta, la participación del profesor se dio durante la experimentación, y sólo participó en la fase de institucionalización con el fin de confrontar los saberes de los estudiantes con los del profesor sobre el problema planteado, llegar acuerdos generales y reforzar las nociones generadas por los estudiantes[8]. Esta forma de trabajo desconcierta a los estudiantes, ya que comunmente éstos esperan una gran participación del profesor como guía en el desarrollo de la clase y la Ingeniería Didáctica no lo implica tanto. Algunos estudiantes no tomaban iniciativa y esperaban, que el profesor indicara cómo abordar los problemas e incluso, diera la respuestas.[9]

Posteriormente, a partir de identificar regularidades en obstáculos epistemológicos en las secuencias exploratorias, se decide entrevistas a estudiantes de economía para hacer un seguimiento más de cerca sobre los procesos de construcción en las nociones de series. En estás clínicas pudo observarse que existen momentos críticos en el aprendizaje de las nociones fundamentales de las series [10] [...]. Además, se desprendieron las siguientes sugerencias: implementar ayudas que le permitan al estudiante no detenerse en cuestiones secundarias al tema que se pretende abordar; presentar una serie de secuencias que lleven un aprendizaje progresivo que permita, en lo posible, la contrastación de esquemas; institucionalizar por etapas y no por sesiones; la función del profesor no se restringe a la fase de institucionalización, sino que conviene su participación en intervenciones que pudieran apoyen a los estudiantes a superar obstáculos. En otra etapa de la investigación, se aplicaron otro grupo de secuencias didácticas donde se implementaron las sugerencias anteriores. La característica fundamental de estas secuencias es atender los momentos más importantes de conflicto de los estudiantes con los saberes sobre las nociones series. El papel del profesor, en estas secuencias, no sólo tuvo un rol fundamental en la fase de institucionalización, sino también en la ayuda preliminar que dio los elementos básicos para poder abordar los problemas planteados, además de buscar poner en conflicto la etapa anterior con el fin de suscitar la necesidad de un nuevo modelo interpretativo sobre las series.[11] De tal forma que la las ayudas frecuentes con la intervención del profesor resultaron positivas,

---

[7] Para una explicación más detallada de los obstáculos se puede consultar a Saldaña, I. Areli. et al. (1996). *Obstáculos epistemológicos en las series desde la perspectiva de la Ingeniería Didáctica en los estudiantes universitarios*. tesis de licenciatura. pp. 130-131. México: Universidad Cristóbal Colón.

[8] Idem, p. 102, 107.

[9] Idem, p.156.

[10] Cfr. Albert, Armando. (1996). *o.c.*, pp. 157- 159.

[11] Idem, p. 175.

porque ayudó a los estudiantes a superar más fácilmente obstáculos y permitiéndoles consolidar lo que los estudiantes iban aprendiendo. En este caso, el papel del profesor, a pesar de ser más participativo, sigue estando predominantemente en la línea del quehacer descriptivo.

Con relación a la fase de institucionalización, el profesor se ve obligado a hacer improvisaciones que le permitan argumentar las limitaciones de los distintos modelos que los estudiantes han construido, así como al verse en la necesidad de improvisar nuevos argumentos si los que dio no convencieron a los estudiantes. Así pues, tanto los estudiantes como el profesor desarrollan un proceso de construcción en el aprendizaje que, aunque de manera diferente, les permite construir nuevos conocimientos o ahondar en ellos. Esto permite identificar una gran ausencia de la investigación en torno al profesor como sujeto que construye sus saberes y, por tanto, susceptible de predicción.

En conclusión, el profesor ha sido, hasta ahora, poco considerado tanto en la teoría como en la implementación de la ingeniería didáctica. Es importante tomar en cuenta al profesor como sujeto de estudio, particulamente desde el análisis *a priori*, específicamente en sus construcciones con los estudiantes en la fase de institucionalización.

El taller de docentes como estrategia de abordaje de un problema: la integración curricular del área Matemática en una Facultad de Ciencias Económicas*

Mercedes Anido de López
Facultad de Cs.Económicas y Estadística. Univ. Nacional de Rosario
Ana María Simoniello de Alvarez
Facultad de Cs. Económicas. Universidad Nacional del Litoral
Facultad Regional Santa Fe. Univ. Tecnológica Nacional
República Argentina

Introducción:

En este trabajo se describe una de las estrategias puestas en marcha para interesar a los educadores del área de Matemática de una Facultad de Ciencias Económicas, en el abordaje de un problema histórico aún no resuelto: *el diseño integral de un currículum de Matemática como materia instrumental en una Facultad de Ciencias Económicas y Estadística.*

Problema:

La enseñanza de la Matemática a alumnos que no estudian una Licenciatura en Matemática plantea un desafío que frecuentemente ha sido ignorado.Los contenidos se desarrollan como si los alumnos fueran potenciales especialistas en Matemática. Pensamos que, para un alumno que vocacionalmente ha elegido una carrera del área de las Ciencias Económicas, podría ser atractivo que el aprendizaje se centre en la búsqueda de soluciones de problemas de Economía que utilicen herramientas matemáticas.

Existe en la actualidad una fuerte corriente en Educación Matemática que sostiene con fuerza la necesidad de que el aprendizaje de Matemática no se realice sólo explorando las construcciones matemáticas en sí mismas, en las diferentes formas que se han cristalizado a lo largo de los siglos, sino en contínuo contacto con las situaciones del mundo real que les dieron y les siguen dando su motivación y vitalidad.

Estrategia de abordaje:

Supuestos:

1. la renovación efectiva de los métodos didácticos, en el marco de un currículum actualizado, sólo puede provenir del convencimiento de los docentes, a partir de su propia experiencia en la reconstrucción del conocimiento matemático, en un proceso de redescubrimiento y análisis de los conceptos que permiten resolver problemas;
2. las herramientas computacionales constituyen un importante disparador para el cambio.

---

* El trabajo se realiza en el marco del Proyecto de Investigación de la Universidad Nacional de Rosario "*La enseñanza de la Matemática con herramientas computacionales*", que dirige la Lic. Mercedes Anido de López.

Una de las estrategias que nos permitió abordar la problemática expuesta y plantear nuevos y más profundos interrogantes, ha sido el desarrollo del *Taller de docentes*. Se elige esta estrategia porque consideramos que:

El Taller de docentes, como espacio de construcción de conocimientos, cuestiona, en la práctica, los aspectos de la educación determinada en función de la enseñanza, y exige un replanteo sobre los mismos, en la perspectiva de una educación con función fundamental en el aprendizaje.

Primer Taller : El taller de reflexión en la práctica docente.

Incluyó en su contenido el aprendizaje y aplicación del Programa DERIVE.Se desarrolló para docentes de las cátedras de Matemática de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística, dirigido por la Lic.Mercedes Anido de López y la Coordinación a cargo de la Prof.Ana María Simoniello de Alvarez.

Algunas conclusiones:

Se ha instalado en el docente participante el reconocimiento sobre la existencia de una herramienta computacional con la que puede operar, en sus clases de Matemática habituales, complementando éstas, con su uso en forma adecuada.

Comenzó un proceso de diseño curricular sobre la forma de inclusión de estas herramientas, de acuerdo con los objetivos que se propongan y, lo que esmuy importante, sobre la base de los recursos humanos y materiales que se disponen.

Segundo Taller : El taller de análisis y elaboración de modelos matemáticos en economía

Objetivos : Promover, entre los docentes de Matemática Básica, una reflexión curricular sobre los contenidos y metodologías del área; dar respuesta a los interrogantes planteados y plantear nuevos interrogantes.

Integrantes : Docentes de Matemática I (Algebra y Geometría Analítica) y de Matemática II (Cálculo Diferencial e Integral) del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística de la Universidad Nacional de Rosario. Estos docentes en general son de distintas edades y desempeñan cargos de Profesor de las distintas jerarquías.

Ejes de trabajo :

1. Propuesta, por los integrantes, de problemas que conduzcan al análisis y elaboración de distintos modelos matemáticos para Economía, y, a partir de los problemas planteados, la iniciación de un proceso de reelaboración de nociones y conceptos. Análisis de los propios procesos y mecanismos puestos en juego.

2. El docente debe tratar de ponerse en el lugar del alumno, de manera que pueda entender lo que el alumno entiende, y en la forma que lo hace.
3. Incorporación de la herramienta computacional, no sólo como calculadora numérica, gráfica y simbólica sino como auxiliar en la exploración del conocimiento (ensayo por prueba y error,conjetura, estimación). Autoexamen de los procesos educativos que tienen lugar al incorporar el computador.
4. Diseño de metodologías que orienten al alumno en el análisis de problemas, y en la modelización con el lenguaje matemático, y estimule la búsqueda autónoma y el propio descubrimiento paulatino de estructuras matemáticas sencillas, en problemas interesantes relacionados con tales situaciones , que surjan de modo natural.
5. Exploración de los diferentes bloqueos que actúan en cada uno de los actores, a fin de conseguir una actitud sana y agradable frente a la tarea de resolución de problemas.
6. Partición de temas importantes del programa. Elección libre de tema, por los participantes, para la propuesta de problemas.

Rol del Coordinador: el Coordinador del grupo acompaña las actividades del proceso; en general actúa como observador atento a las situaciones que se plantean, y está familiarizado con las formas de resolver los problemas para que al finalizar pueda él mismo, sobre la base de sus observaciones y registros, analizar las propuestas y complementar los resultados alcanzados por cada subgrupo, participando en la reflexión final.

Herramienta computacional:

Consideramos necesario el uso inteligente de la herramienta computacional dado las posibilidades que ofrece, al permitir la realización de cálculos numéricos, simbólicos y representaciones gráficas que son dificiles, si no imposibles de obtener, por su complejidad, con el método habitual " a lápiz y papel ".

Se eligió el Programa DERIVE porque posee amplias posibilidades operativas; utiliza un lenguaje natural, como el que se utiliza en el aula de Matemática, habitual, en forma simbólica numérica y gráfica.

Producción del Taller:

Se propusieron problemas relativos a los siguientes modelos económicos:

Oferta y demanda, punto de equilibrio.	Costos: total, promedio, marginal (total ó parcial).	Crecimiento y decrecimiento. Función logística
Insumo-producto.	Ingresos: total, promedio,marginal (total ó parcial).	Excedentes: de producción , de consumo.
Tasas de variación: relativa , porcentual.	Optimización.	Productos competitivos ó complementarios.

Metodología Orientadora: : a partir del trabajo del docente se llegó a diseñar una metodología orientadora en la resolución de problemas.

Surgieron en forma natural **espacios** que coinciden con las **fases** que sugiere **Polya** : " ***entendimiento, diseño, implementación y visión retrospectiva*** ".

1- Espacio de interpretación de enunciados

Análisis semántico
Separación de las partes del enunciado: incógnitas, datos, vinculación entre ellos.

2- Espacio de diseño de un plan de trabajo

Exploración intuitiva Determinación de variables independientes y dependientes Representación de esas variables	
Búsqueda de estrategias de vinculación entre las variables, y traducción de esas relaciones entre variables a lenguaje algebraico ó gráfico, por pasos sucesivos.	Establecimiento de conjeturas. Utilización del computador en la exploración y pertenencia de las conjeturas (cuando sea útil).
Verificación empírica y análisis de concepciones falsas.	

3- Espacio de resolución del problema

Explicitación formal del modelo matemático.	Expresión del resultado en forma analítica y con gráficos.
Utilización de la herramienta computacional.	

4- Espacio de análisis de resultados

Análisis de los resultados en relación con el modelo matemático: verificación analítica y gráfica.	Interpretación y pertenencia de los resultados en el contexto económico

Logros y dificultades actitudinales:

En todo momento los docentes se mostraron interesados por las tareas propuestas, pero, sin dejar de exteriorizar cierta inquietud por el desafío que implicaban. Si bien el área temática que comprendía está incluída en sus tareas y accionar habituales, fue el enfoque y propósitos lo que reconocieron, debían afrontar como novedad para lograr los resultados esperados.

Actitudes de los participantes:

Los docentes trabajaron con ahínco y voluntad ante el esfuerzo; nótese que, para desarrollar la actividad del Taller, no gozaron de una disminución en las tareas habituales, sino que el mismo constituyó una obligación más entre sus tareas docentes. A la fecha de esta presentación cada subgrupo complementa lo realizado en el Taller, con el propósito de completar el diseño de sus trabajos para concretar su publicación.

Conclusión: Consideramos que se ha logrado un aporte para la construcción de una metodología que involucra la educación Matemática en función del aprendizaje.

Comentario:

Los asistentes a la presentación de este reporte, en *Relme-11* , manifestaron a la expositora su agrado por la realización y significación de esta experiencia en la que se revela la necesidad de que el docente de Matemática revalorice permanentemente su rol en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en la búsqueda de mejorar la calidad del mismo y acompañando con la utilización de nuevas tecnologías como medios para colaborar en el desarrollo de las capacidades del alumno durante su aprendizaje.

Referencias Bibliográficas:

- **Anido, M. y Bortolato, G.** (1987). *Bases para un diseño curricular con proyección al post-grado.* Imprenta de la Universidad Nacional de Rosario.
- **Beppo L.** (1945). *Formación Matemática.* Matemática NUTAE.
- **Guzmán, M.**. *Tendencias innovadoras en Educación Matemática.* Red Olímpica
- **Ortiz, H y Hernández, F.** (1994). La investigación en Didáctica de la Matemática y la construcción del conocimiento en el aula. *Publicación de la 8va Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e Investigación en Matemática Educativa.*
- **Polya, G.** (1945). *How to solve it.* Princeton. University Press.
- **Simons, F.** (1996) . Technology in Mathematics Teaching. *Publicación del I.C.M.E 8,* Sevilla, España.
- **Urigo, S. y Manuel, L.** (1994) . *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamerica.

Experiencias didácticas en la organización sistémica del proceso de enseñanza de la matemática para las carreras de ingeniería.

Tamahara Díaz García
Israel Mazario Triana
Rosa González Romero
Ramón Almeida Fernández
Univ. de Matanzas, Cuba

Resumen.

La enseñanza de la matemática en las especialidades no matemáticas enfrenta dificultades para el logro de habilidades específicas y para estimular el desarrollo del pensamiento creador, abstracto, lógico así como la facultad de razonamiento y toma de decisiones adecuadas ante posibilidades diferentes de trabajo. Se muestra una experiencia sobre cómo organizar el proceso de enseñanza en las carreras de Ingeniería en forma de sistema y en correlación con otras disciplinas de cada especialidad.

Introducción.

El diseño de programas de estudio en la Educación Superior expresa una concepción pedagógica acerca del proceso de enseñanza aprendizaje y una tarea de gran importancia para la organización general de este proceso, eminentemente activo y regular.

Los programas de estudio responden a un sistema pedagógico predefinido para la formación del especialista y se apoyan en la teoría lógica del proceso de asimilación, tomando las ideas del enfoque histórico cultural de Vigotski y la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales de Galperin, teniendo en cuenta que toda concepción curricular debe asentarse sobre una estrategia que sea consecuente con los mismos.

Las dificultades que se presentan en el correcto desarrollo de la enseñanza en las carreras de ingeniería es un aspecto de la etapa actual que preocupa a todos los que, de una u otra forma inciden en la formación del profesional de esta rama, en la que matriculan un alto nivel de estudiantes y son pocos los que culminan los estudios.

El objetivo del trabajo es contribuir a través de la propuesta metodológica al perfeccionamiento del proceso docente educativo de la enseñanza de la Matemática Superior.

Desarrollo.

A partir del estudio de los programas de la disciplina Matemática para las carreras que experimentarían en el sentido que se ha planteado (Ingeniería Química e Ingeniería Agronómica), con lo cual se precisaron las tareas a cumplir para lograr el objetivo propuesto, organizándose sistemas de conocimientos y habilidades necesarios para un adecuado desarrollo del proceso docente-educativo y profundizando en los lazos de vinculación con las motivaciones y necesidades de cada carrera.

En forma general se consideró que es necesario desarrollar en los egresados de estas especialidades algunas habilidades que deben concretarse y particularizarse para cada una de ellas y que son las de: formular matemáticamente los problemas, seleccionar adecuadamente el método matemático y encontrar el algoritmo de resolución del problema planteado, aplicar métodos numéricos en la resolución de problemas y de utilizar los ordenadores, elaborar recomendaciones prácticas sobre la base del análisis matemático realizado y el análisis de los resultados obtenidos, la resolución exitosa de problemas planteados.

Para resolver el problema global de la preparación matemática del estudiante de ingeniería se requiere de formas organizativas del proceso de enseñanza de la matemática que permitan organizar los sistemas de conocimientos y habilidades necesarios para un adecuado desarrollo del proceso docente-educativo y profundicen en los lazos de vinculación con las motivaciones y necesidades de las carreras.

Un primer paso lo constituye el esclarecimiento de qué necesidades tienen las disciplinas básicas y especializadas, lo que se logra respondiendo interrogantes como las siguientes:¿ Qué contenidos de Matemática resultan necesarios para el estudio de la especialidad? ¿En qué medida utilizan activamente los métodos y conceptos matemáticos las disciplinas de la especialidad que se analiza?

Para responder a estas interrogantes lo primero es establecer coordinación con las disciplinas fundamentales de la especialidad para definir qué temas del aparato matemático y con qué nivel de profundización y/o aplicación los utilizan y así poder establecer nexos entre las matemáticas y las disciplinas analizadas, planteando conceptos y leyes esenciales para su posterior aplicación, realizando así la revisión de los objetivos generales de la carrera y de cada disciplina en particular.

A posteriori se realiza la derivación gradual de los objetivos y se evalúa la incidencia directa e indirecta en cada tema quedando así conformado un sistema de objetivos que establece una correspondencia adecuada tanto horizontal como verticalmente.

A partir de aquí se determinan los núcleos del conocimiento y los componentes teóricos del contenido que tengan carácter generalizador, lo que conjuntamente con los métodos adecuados de trabajo, aumentan la eficacia del proceso docente-educativo.

Después de precisar objetivos y contenidos en función de las necesidades para una correcta formación del profesional de manera que motive al estudiante a estudiar conscientemente la Matemática y al mismo tiempo que su estudio no constituya una suma fría de conocimientos, a veces no imprescindible, el siguiente paso lo constituye la determinación de que métodos y formas de enseñanza emplear para que el proceso docente constituya un sistema típico de enaseñanza-aprendizaje.

Para ello no puede olvidarse que un centro de enseñanza superior prepara al estudiante para enfrentarse a nuevas situaciones por lo que los métodos de enseñanza deben estar en correspondencia con las demandas de cada disciplina que estudia.

Se analizó que los objetivos y el principio de organización del proceso pedagógico determinan las diferencias entre las distintas formas de enseñanza y que la Matemática no se aleja de esta verdad. Sobre la organización de la enseñanza explicativa ilustrativa descansa el principio de la transmisión de resúmenes de ciencias elaborados por el docente, mientras que sobre la base de la propia organización del proceso de la enseñanza problémica descansa el principio de la actividad docente-investigativa de los estudiantes, es decir, "el descubrimiento" independiente de los resúmenes de ciencias.

Por tanto, se selecciona el método adecuado a utilizar en cada actividad, incluyendo clases en las que los estudiantes disponen de un tiempo de exposición; seminarios talleres donde los mismos preparan y debaten nuevos contenidos y se les evalúa; clases en las que el estudiante trabaja individualmente o conjuntamente con su profesor, y otras.

Es esencial que en cada clase el alumno conozca el objetivo de la actividad y lo acepte como suyo. Para ello resulta eficaz el planteamiento de problemas y ejercicios que de forma directa o indirecta articulen con situaciones de la especialidad que cursa.

Todo este análisis condujo a la confección de un diseño de la disciplina Matemática que permitiera una mejor organización del proceso de enseñanza para las carreras de Ingeniería y los resultados obtenidos han sido satisfactorios ; con un mayor número de estudiantes aprobados, una mejor calidad en la promoción (alumnos evaluados de excelente) y un reconocimiento por parte de los docentes de disciplinas de las especialidades de una mejor selección y aplicación de las vías de trabajo en las que se utilizan métodos matemáticos.

Conclusiones:

1. Se elaboró un sistema metodológico único, funcional, para todas las asignaturas de la disciplina Matemática en las especialidades estudiadas, vinculándose la enseñanza de la Matemática con otras disciplinas de la especialidad
2. Fue posible concretizar el contenido de la disciplina Matemática, considerando los intereses de la propia disciplina y de las disciplinas de la especialidad.
3. A cada elemento del proceso docente-metodológico se le asignó una función específica con sus propias características para garantizar el funcionamiento armónico del todo el sistema.
4. Se creó un sistema de evaluación que permitió el autocontrol y el control de los objetivos propuestos para la disciplina, dentro del perfil de la especialidad.

Referencias Bibliográficas:

- **Álvarez , C.** (1989). *Fundamentos teóricos de la Dirección del Proceso docente educativo en la Educación Superior*. Ciudad de La Habana.
- **De Guzmán, M.** (1992). "*Tendencias innovadoras en Educación Matemática*", edipubli S.A., Buenos Aires.
- **Galperin, P.** (1996). *Los tipos fundamentales de aprendizaje en Lecturas de psicología pedagógica*. Moscú.
- **Hernández, S. y otros**. *La Enseñanza de la Matemática y la racionalización del trabajo mental de los alumnos*.
- **Shoenfeld, A.** (1991). "*Ideas y tendencias en la resolución de problemas*", edipubli S.A., Argentina.

TEORÍA Y METODOLOGÍA

MATEMÁTICA EDUCATIVA: CÓMO MEJORAR SU ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

Dora Odstrcil, María Rey Genicio, Graciela Lazarte, Clarisa Hernández
Facultad de Ingeniería- Universidad Nacional de Jujuy- Argentina

El propósito de esta comunicación es el de darles a conocer la experiencia que hemos recogido, como equipo de investigación del proyecto "Diagnóstico y Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática" (D.Y.M.E.M.) aprobado por la Secretaría de Ciencia y Técnica y Estudios Regionales de la Universidad Nacional de Jujuy , República Argentina.

Antecedentes:

El proyecto citado, en ejecución desde marzo de 1996, se origina por la necesidad de investigar y analizar algunos aspectos detectados a través de la práctica, como docentes de Matemática de la carrera de Ingeniería.

Concretamente, como profesores a cargo del curso de Ingreso a la Facultad de Ingeniería, hemos comprobado errores sistemáticos en la resolución de problemas y ejercicios , que luego se reiteraban en el cursado de las asignaturas de Matemática del primer año de la carrera.

Los exámenes de ingreso fueron entonces analizados en forma estadística, detectándose errores de concepto, de interpretación, de cálculo, etc. Al respecto las conclusiones generales fueron : La gran mayoría de los alumnos resuelven con solvencia problemas o situaciones que se plantean con bastante ejercitación en el Nivel Medio (problemas clásicos como la resolución de triángulos rectángulos, sistemas de ecuaciones lineales, Regla de Ruffini, Teorema del Resto). En cambio, presentan dificultades en la resolución de ejercicios que plantean situaciones diferentes o que requieran un mayor razonamiento lógico, como ejercitación en el plano procedimental (ecuaciones de segundo grado, ecuaciones trigonométricas, funciones).

Para clarificar esto comentaremos algunos ejemplos:

- Casi el 50% de los alumnos sabe calcular las raíces de una ecuación cuadrática pero muy pocos supieron reconstruir el polinomio a partir del conocimiento de sus raíces o de las propiedades de las mismas. Vale decir saben trabajar en un sentido pero no a la inversa.
- En trigonometría el 72% de los alumnos fracasan en la resolución de ecuaciones pero sí pueden resolver problemas sencillos cuya resolución involucra funciones trigonométricas aplicadas a un triángulo rectángulo, ejercicios que son repetidamente practicados en la escuela.
- Los estudiantes resuelven ejercicios combinados extrayendo paréntesis cuando la situación lo requiere, pero no saben introducirlos cuando es necesario. Nuevamente el proceso inverso provoca dificultades.

En el cursado de las asignaturas de la carrera, se han detectado otros errores, por ejemplo: en el caso de los logaritmos reconocen la propiedad de que el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. Sin embargo, no identifican que la suma de los logaritmos es igual al logaritmo del producto Esto sería similar a decir que **c** es igual a **d**, pero no reconocer que **d** es igual a **c**, por ejemplo:

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b \qquad OK!!!!!$$

$$\text{pero si tengo} \quad \log a + \log b = ?????$$

Lo mismo sucede con las restantes propiedades del logaritmo y de otras funciones. Aparentemente en el ciclo medio se tiende a trabajar en un solo sentido.

Este diagnostico nos permitió planteamos las primeras hipótesis acerca de las posibles falencias en la enseñanza de algunos temas de matemática en el Nivel Medio.

El proyecto D.Y.M.E.M: Objetivos y actividades:

Los objetivos del proyecto se focalizaron, por una parte, hacia el análisis curricular y los modos de enseñanza, y por otra parte, hacia los posibles aportes o contribuciones que pudieran hacerse al sistema, ya sea en forma directa a los docentes o a los niveles de diseño curricular jurisdiccional.

Algunas de las estrategias de trabajo seleccionadas son:

1.- **Conformar un equipo de trabajo con docentes del nivel medio a través de acuerdos formales con las respectivas instituciones, con el objetivo de analizar los contenidos de los programas de los diferentes cursos para sugerir una mejor estructuración y correlatividad entre ellos. Hasta la fecha se concretó esta actividad en 4 instituciones (públicas y privadas)**

2.- **Proponer un espacio de reflexión conjunto con docentes del Nivel Medio de esas y otras instituciones para trabajar principalmente en el análisis de las estrategias de abordaje de distintos temas, incluyendo tanto al contenido disciplinar como los aspectos relacionados con las teorías de aprendizaje y sus implicancias metodológicas.**

3.- **Recoger información mediante encuestas, entrevistas, observación de clases, talleres de discusión, análisis de programas y planificaciones, que permitan obtener datos de la realidad sobre el tema de investigación del proyecto D.Y.M.E.M. El tratamiento estadístico cuali y cuantitativo de los mismos nos permitirá una puesta a prueba de la hipótesis central planteada**

Primeros resultados del diagnóstico de situación:

Siendo éste el primer año de trabajo y teniendo en cuenta que el grupo de profesores del Nivel Medio que participaron fue reducido, daremos a conocer los primeros resultados obtenidos en el relevamiento o diagnóstico:

1. Los docentes no siempre son claros en los enunciados de las situaciones problemáticas que presentan a los alumnos. Esto provoca, por una parte, que el estudiante no resuelva correctamente el problema por falta de comprensión de la consigna y por otra, crea el hábito de obviar la lectura para preguntar directamente al docente qué es lo que debe hacer. Tal vez por eso, observamos en la Universidad que los alumnos tienen la costumbre de no leer el enunciado y optan por el camino más fácil: preguntar al profesor qué pide el problema. En esos casos, a veces el profesor sólo se limita a leer la consigna literalmente y llama la atención que el alumno comprenda más fácilmente el enunciado al escucharlo que al leerlo por sí mismo. Esto a su vez plantea otro tema de análisis,

que es el de la comprensión lectora, que lógicamente escapa a nuestro campo de trabajo.

2. Los profesores presentan a los alumnos situaciones problemáticas y/o de cálculo de manera repetitiva, sin buscar la variedad de aplicaciones que cada tema ofrece. Así se induce a los alumnos a realizar un trabajo mecánico sin ejercitar el pensamiento analítico y lógico.
3. Los docentes reconocen sus limitaciones y justifican sus falencias por una inadecuada formación profesional, y en general están muy bien dispuestos a participar en actividades que les brinde orientación y acompañamiento en toda esta transformación educativa.

Reflexiones:

Creemos que es básico detectar con precisión las causas del fracaso de un estudiante. La determinación de las mismas es el paso determinante para avanzar hacia la resolución del problema. Igualmente, creemos que de la reflexión y el trabajo conjunto entre docentes de ambos niveles, el Medio y el Universitario, surgirán sin duda los aportes necesarios para mejorar la articulación.

La transformación educativa que se está desarrollando en nuestro país propone, además de un cambio en la estructura del sistema, la reorganización e inclusión de contenidos curriculares y propuestas metodológicas. En éste marco se dictan cursos de capacitación a los docentes , en forma gradual hasta incluir todos los niveles, encontrándose en una etapa inicial, restando aún bastante tiempo para que la capacitación incluya a docentes del actual nivel medio (objeto de nuestra investigación).

La enseñanza de la matemática ha caído con frecuencia en un vacío entrenamiento de resolución de ejercicios que si bien logra cierta fluidez taquigráfica, no conduce a la comprensión ni a la creatividad. Por lo tanto no contribuye a desarrollar la interdependencia intelectual ni la sólida formación que los jóvenes estudiantes requieren.

Por ello, nuestro propósito es conocer la realidad de la enseñanza de la matemática en este tramo del sistema y ofrecer, a partir de ella, una propuesta de trabajo que supere las dificultades metodológicas y los estancamientos en teorías que promueven aprendizajes memorísticos, poco reflexivos, condicionados y escasamente significativos. Solo así, el docente de Nivel Medio podrá transitar por el camino de la transformación como actor y no como espectador, y solo así estarán preparando realmente a los estudiantes para que logre con éxito desenvolverse en la vida diaria laboral y/o estudios superiores.

Finalmente queremos compartir con Ustedes una última reflexión. En nuestra investigación hemos trabajado con pocas Instituciones, sin embargo en cada una de ellas se introdujeron cambios de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales en los programas de matemática, y los docentes pudieron revisar su abordaje pedagógico-didáctico. Entonces la pregunta es ¿No será por ese lento camino de trabajar con cada institución educativa, por donde verdaderamente se logrará un mejoramiento de la calidad en la Enseñanza de la Matemática y de otras disciplinas ?.

Referencias Bibliográficas:

- **Bigge y Hunt** (1978). *Bases Psicológicas de la Educación*. Editorial Trillas.
- **Brousseau, G.** (1991). *Qué Pueden Aportar a los Enseñantes los Diferentes Enfoques de la Didáctica de las Matemáticas*. Université de Bourdeauz. Francia. Mimeo.

La enseñanza de la matematica en un sistema de aprender haciendo

Adalid Gutiérrez, Ph.D.
Escuela Agrícola Panamericana, Zamorano
Honduras, C.A.

Introducción:

La Escuela Agrícola Panamericana, mejor conocida como Zamorano, desde su fundación ha basado su enseñanza en el principio de Aprender Haciendo de John Dewey, y fue llevado a la práctica en toda su dimensión por Wilson Popenoe al fundar esta institución en 1942; dicha práctica se ha transmitido de generación en generación hasta la fecha, pero fundamentalmente en los conocimientos agronómicos, en donde los campos de cultivos, los talleres de maquinaria, riegos, etc., han permitido siempre que la teoría y la práctica vayan de la mano. En conocimientos donde esta relación depende del uso de la tecnología moderna, el problema se solventa haciendo la inversión necesaria para obtener el equipo requerido. En realidad, la dificultad se presenta en la enseñanza de asignaturas que por su naturaleza se incorporan contenidos en los programas con objetivos formativos o de preparación para estudios futuros.

La Matemática enseñada en esta institución en las décadas iniciales se centraba fundamentalmente en cuestiones de Aritmética y Geometría Elemental. Sus contenidos fueron propuestos y desarrollados por los profesores de las materias profesionalizantes. Con el surgimiento de las llamadas Matemáticas Modernas en los 50's y 60's, los contenidos de los programas se orientan a darle un desarrollo lógico y se introduce la Teoría de Conjuntos como fundamentación de la Matemática, y desde este momento esta asignatura se enseña considerando como objetivo principal el desarrollo lógico, descuidando sus aplicaciones. De esta manera, por el solo hecho de dar paso al análisis matemático rudimentario se introducen temas en los programas sólo por justificar el desarrollo sistemático, olvidándose de su aplicabilidad.

Problemática:

En la actualidad nos encontramos con programas que sintetizan el conocimiento y que están llenos de temas indispensables para hacer un estudio matemático posterior (Cálculo, por ejemplo) pero que los agrónomos siempre dicen que no les sirve de nada en la vida profesional. Dada esta estructura, se presentan las siguientes tres interrogantes:

- ¿Es posible que la mayoría de los temas en la estructura actual tengan aplicaciones reales? En Zamorano se habla de "Casos Reales".
- Aun más ¿es posible incorporar nuevos temas, conjuntamente con sus aplicaciones?
- ¿Es posible eliminar algunos temas e incorporar otros con aplicabilidad real, conservando el desarrollo lógico de la materia?

No debemos olvidar que uno de los objetivos de la enseñanza de la Matemática es siempre desarrollar la capacidad de abstracción y de análisis, y por tanto, no se puede pasar al extremo de enseñarla como el enunciado de muchas recetas.

Aunque la Matemática, como algunas de las ciencias nacen con la agricultura, su desarrollo posterior depende de otros campos completamente alejados. Por lo tanto, el gran desafío que se presenta al educador que enseña esta disciplina es cómo regresar con todas estas nuevas herramientas a los cursos básicos de los institutos aplicados. En mi opinión, aquí tenemos un tremendo reto, en la experiencia que he tenido como matemático, me ha resultado más favorable ajustar o buscar un modelo en las aplicaciones avanzadas, que en los niveles primarios o secundarios.

Estrategias de mejoramiento:

En Zamorano, hasta 1996, las actividades prácticas se desarrollaban en un sistema llamado Micromódulos, en donde el estudiante desarrollaba una habilidad especial, pero que en la mayoría de los casos realizaban actividades aisladas (por ejemplo se sembraba un cultivo determinado; aunque el estudiante no se preocupaba por aspectos de la comercialización y procesos de optimización de ese cultivo). A partir de 1997 se ha iniciado un nuevo sistema llamado Macromódulos en donde diferentes actividades del Aprender Haciendo, se planifican y desarrollan en forma unificada para que el estudiante adquiera destrezas integradas, propias para <u>la toma de decisiones</u>.

Como se ve desde lejos, es mi opinión que este nuevo sistema nos proporciona la oportunidad de integrar los métodos cuantitativos en la toma de decisiones óptimas, tanto en los procesos de producción como en la comercialización.

En conclusión, la tarea en este año de 1997 es incorporarse en las actividades de los Macromódulos para identificar junto con los instructores, todas las actividades que requieran de métodos cuantitativos, e ir más allá, al detectar otras actividades que deben estar incluidas en este nuevo sistema y que su desarrollo implique la introducción de nuevas técnicas cuantitativas.

En el pasado se han hecho esfuerzos en forma aislada (creación por parte del Departamento de Ciencias Básicas y auspiciado por la Dirección de un Mini-Proyecto Material Didáctico para los Cursos de Matemática y Física en El Zamorano, donde con ayuda de algunos departamentos se ha logrado recopilar diversos Casos Reales de aplicaciones de la Matemática, estructurando de esa manera un folleto de Casos Reales e incorporándolos en los textos de Algebra, Geometría y Funciones Trascendentales, Introducción al Cálculo y Física Elemental.

El Sistema "Aprender Haciendo" implica que cada tema que se introduce en Matemática, debe hacerse sin perder de vista dos metas:

a) <u>La aplicabilidad</u>: Es la única manera de incorporarse al sistema de Macromódulos y por ende reforzar el desarrollo de las destrezas del futuro profesional.

b) <u>La esencia de la asignatura</u>: Orden lógico intuitivo, para que el aprendiz sienta el sabor de los métodos abstractos que estudia y se logre que vea que la Matemática es una facilitadora del aprendizaje de muchas destrezas que le servirán en su vida profesional.

Un ejemplo puede ilustrar esta inquietud. La base e:

Matemáticamente el número e se define por: e = $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$

¿Qué interpretaciones tiene en los procesos reales?

1. Biológico:

Suponga que en una plaga con una población inicial de P_o se reproduce a razón de $r\% = \frac{r}{100}$ por un período fijo (puede ser un año, un mes, una semana, etc.), y $1 - \frac{r}{100}$ no se reproducen porque se mueren, etc. Si t es el número de períodos y cada período se divide en n subperíodos de reproducción, se tiene:

$$m = o \to P = P_o$$

$$m = 1 \to P = P_o + \frac{r^{\%}}{n} P_o = P_o\left(1+\frac{r^{\%}}{n}\right)^1$$

$$m = 2 \to P = P_o\left(1+\frac{r^{\%}}{n}\right) + \frac{r^{\%}}{n} P_o\left(1+\frac{r^{\%}}{n}\right)$$

$$= P_o\left(1+\frac{r^{\%}}{n}\right)\left(1+\frac{r^{\%}}{n}\right)$$

$$= P_o\left(1+\frac{r^{\%}}{n}\right)^2$$

$$m = nt \to P = P_o\left(1+\frac{r^{\%}}{n}\right)^{nt}$$

Notemos que si la plaga es lo suficientemente grande, podemos asumir que se reproduce instantáneamente y en tal caso:

$$P = \lim_{n\to\infty} P_o\left(1+\frac{0.0r}{n}\right)^{nt}$$

$$= \lim_{m\to\infty} P_o\left(1+\frac{1}{m}\right)^{0.0rt}, con \frac{0.0r}{n} = \frac{1}{m}$$

$$= P_o\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{0.0rt} = P_o e^{0.0rt}$$

2. Económico:

Se inicia con un capital de A = \$1 a un interés del $i = \frac{r}{100} = r^{\%}$

a) Si j = 1, entonces el capital al final del año es:

$$P(1) = A + iA = A(1+i) = A\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1} = 2$$

Si j = 2, entonces el capital al final del año es:

$$P(2) = A(1+i) + i\,A(1+i) = A(1+i)(1+i)$$

$$= (1+i)^{2} = \left(1+\frac{1}{2}\right)^{2} \quad 0$$

Si j = m, entonces:

$$P(m) = \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} \quad 0$$

En el caso de $m \to \infty$ (el interés se capitaliza continuamente durante el año) se tiene:

$$e = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} = \lim_{m\to\infty} P(m)$$

Conclusión: El número e = 2,71828 puede interpretarse como el valor al que ascenderá al final del año un capital inicial de un Peso si se capitaliza continuamente a la tasa del 100%.

Recomendaciones:

1. Todo profesor de Matemática debe tener los conocimientos adecuados para dar una interpretación de los conceptos matemáticos introducidos a los estudiantes de acuerdo a la carrera profesional que estudian.
2. La formación de profesores en Matemática debe estar orientada a satisfacer esta necesidad.

Referencias Bibliográficas:

- **Chiang, C.** (1987). *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. Mc. Graw Hill.
- **Machin, D**. (1976). *Introducción a la Biomatemática*. Editorial Acribia.

Indicadores en el rendimiento académico de alumnos

Berta Chahar de Corrales[1], *Carmen Torrente de Abuin*[2],
Dardo A. Escalante Figueroa[3]. *Fac. de Medicina U.N.T*
correo: postmaster@fmtuc.ald.ar.

Resumen: A partir del año 1989 se implementó un nuevo plan de estudios en la Facultad de Medicina de la UNT en pos de evaluar los resultados del mismo y a fin de brindar elementos de juicio que permitan los ajustes pertinentes se realizó un seguimiento desde el momento de su puesta en vigencia.

En el presente trabajo se busca encontrar parámetros de evaluación del rendimiento académico de los alumnos. Para lograr el objetivo antes mencionado se han definido distintas variable, entre ellas: eficiencia, y proporción de materias aprobadas que se aplicaron conjuntamente con la nota promedio.

En el caso particular de los primeros ingresantes se estudió, además, a las diferentes variables en función del momento de aprobación del módulo introductorio.

Después del análisis realizado llegamos a la conclusión que las tres variables se complementan para explicar la realidad bajo estudio . Si se tuviera que elegir a una de ellas la **proporción de materias aprobadas** es la más adecuada ya que contempla la variable tiempo. La **nota promedio**, que es la de mayor uso, no resultó relevante.

1. Introducción:

La Asociación de Facultades de Ciencias Médicas de la República Argentina (AFACIMERA), se reúne periódicamente para analizar la problemática compartida por las distintas facultades, dentro de ese marco surge la necesidad de analizar y discutir una transformación curricular.

La Facultad de Medicina de la Universidad Nacional de Tucumán implementa un nuevo plan de estudios a partir del año 1989. En pos de evaluar los resultados del mismo se realizó un seguimiento desde el momento de su puesta en vigencia, a fin de brindar elementos de juicio que permitieran los ajustes pertinentes.

Respondiendo a un convenio firmado en el año 1993 entre las Universidades y el Ministerio de Cultura y Educación de la Nación surge el Programa de investigación denominado Educación Universitaria dando marco al presente trabajo, cuyo propósito es medir la calidad universitaria en todos sus aspectos. Se establecieron los siguientes objetivos generales:

1. Definir el concepto de Calidad Universitaria.
2. Desarrollar modelos, mecanismos e instrumentos para la evaluación institucional.

---

1 Prof.Adj. Facultad de Bioquímica Química y Farmacia U.N.T.
2 J.T.P Facultad de Bioquímica Química y Farmacia U.N.T.
3 Prof.Adj.Facultad de Medicina U.N.T.

3. Formar recursos humanos para la autoevaluación continua

2. Metodología:

Se actualizaron las bases de datos de alumnos obtenidos del Centro de Cómputos de la Facultad, tomándose solamente a los alumnos de las cohortes que comenzaban el cursado de la nueva currícula según la siguiente distribución (año-alumnos): 1989-577, 1990-528, 1991-598 y 1992-600.

Hubo necesidad de tener en consideración una serie de aspectos que emanan de las propias características del nuevo plan de estudios, ya que en el mismo existen materias que se aprueban por examen, promocionales y las integradoras que contienen módulos pertenecientes a otras materias y que se aprueban por la suma de las aprobaciones de los distintos módulos más un examen final.

Esta diversidad de tipos de evaluación de las materias dificultó el tratamiento de los datos.

Además el aspirante a alumno de la carrera de médico debe aprobar un módulo introductorio, que inicialmente (cohorte ´89) se consideró como una materia más de la carrera. En caso de desaprobar, por el régimen de materias correlativas impedía el cursado del resto de las materias de primer año e influía en los parámetros de evaluación. Posteriormente se lo consideró como pre requisito para el ingreso fuera del curriculum.

Los datos de partida del estudio fueron:

- Suma de las notas.
- Número de exámenes rendidos.
- Número de materias aprobadas.
- Número de materias promocionadas (no se consigna nota)
- Número de exámenes rendidos.

2.1 Indicadores de rendimiento

Se discutió acerca de las variables que mejor se ajustaran para explicar el rendimiento académico de los alumnos. Se consideró como variable primaria de descripción el promedio. Esta variable, si bien denota parcialmente el rendimiento, oculta situaciones que se deben tener en cuenta, como por ejemplo la cantidad de exámenes rendidos en cada año lectivo. Tratando de salvar las limitaciones descriptivas del promedio se definieron **Proporción De Materias Aprobadas y Eficiencia**:

Proporción de materias aprobadas se definió como:

$$\mathrm{Pr} = \frac{\textit{Suma de examenes aprobados hasta el tiempo } T}{\textit{Suma de examenes exigidos por la curricula hasta el tiempo } T}$$

Establece la relación entre las materias aprobadas por el alumno y las que debería tener aprobadas, hasta el momento considerado, exigidas por la currícula. Esta relación está vinculada con el tiempo que el alumno está en la carrera, después del tiempo previsto por el plan de estudio.

Eficiencia se definió como: $$Eficiencia = 1 - \frac{Numero\ de\ aplazos}{Examenes\ rendidos}$$

Permitiría suponer la permanencia del alumno en el sistema dado que sería más factible la deserción para aquel alumno que tenga baja eficiencia.

Merece párrafo aparte la cohorte ´89 por cuanto fue la que sufrió el impacto de la implementación del nuevo plan de estudios. Para esta cohorte se consideraron las variables definidas en el presente trabajo en función del momento en que el alumno aprobaba el módulo y era considerado, desde ese momento, como alumno ingresaste en la carrera.

Para poder comparar las diferentes cohortes se calculó el promedio de los indicadores individuales de cada uno de los alumnos.

3. Resultados:

Las diferencias en el primer año se deben a que el módulo introductorio tuvo mucha preponderancia, a tal punto que se rindió un examen y cuatro recuperaciones.

A continuación se incluyen tablas y gráficos correspondientes a la cohorte ´89. Se analizan las variables anteriores para los distintos momentos de aprobación del módulo introductorio.

Tabla 1. Proporción de materias aprobadas

Año	Co´89	Co´90	Co´91	Co´92
1er	0.35	0.65	0.6	0.65
2do	0.52	0.51	0.5	0.48
3er	0.47	0.48	0.46	0.41
4to	0.4	0.39	0.38	0.35

Fuente : Base de Dato Depto de Cómputos
Fac. de Medicina U.N.T.
Co´ equivale a cohorte

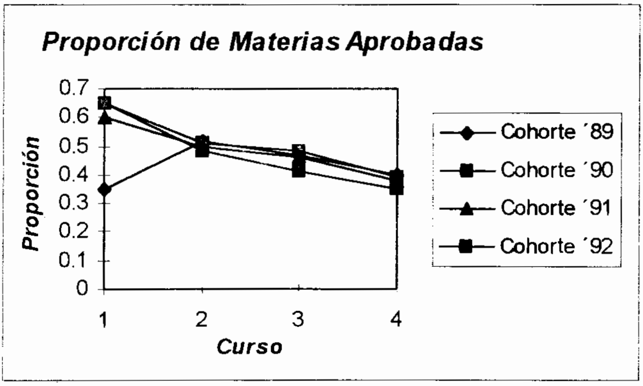
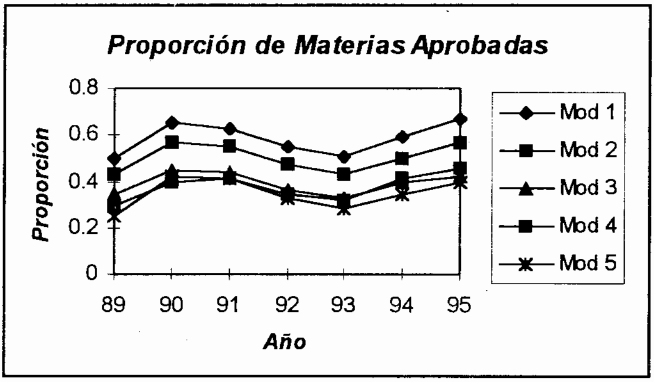


Tabla 2. Proporción de Materias aprobadas según módulos

	M1	M2	M3	M4	M5
'89	0.5	0.43	0.34	0.29	0.25
'90	0.65	0.57	0.45	0.4	0.42
'91	0.63	0.55	0.44	0.41	0.41
'92	0.55	0.47	0.36	0.34	0.33
'93	0.51	0.43	0.33	0.32	0.28
'94	0.59	0.5	0.4	0.41	0.34
'95	0.67	0.57	0.42	0.46	0.4

Fuente: Idem Tabla 1



El paralelismo de las curvas nos indica la uniformidad del comportamiento de los alumnos independientemente del momento de ingreso a la carrera. Observamos que los alumnos que ingresaron en el primero y segundo examen muestran una mayor proporción de materias aprobadas. En el cuarto año de la carrera se nota una marcada disminución en los valores debido a que el curriculum está sobrecargado. Es de destacar también la trayectoria de los alumnos que ingresaron en la última recuperación que al final de la carrera logran superar a alumnos más aventajados anteriormente.

4. Discusión:

Analizando cada uno de los indicadores en forma particular podemos observar que:

Eficiencia:

- El valor 1 (uno) indica que el alumno estaría siguiendo su carrera en los tiempos previstos.
- El valor 0 (cero) indica que el alumno no ha rendido ningún examen.

- **Proporción de materias aprobadas**
  - El valor 1 (uno) indica que el alumno cumple con las exigencias en los tiempos previstos.
  - Este indicador ya fue utilizado en un estudio de sobrevida, con resultados que permiten hacer una estimación anticipada de la canti-

dad de alumnos que deberá manejarse en función de los que no cursen en forma regular.

- Si el valor de cálculo fuera mayor que la unidad indicaría que o el alumno proviene de otra carrera o porque el sistema de equivalencias pudo haber adelantado los tiempos.
- Si la proporción de alumnos en estas condiciones fuera importante (no por una migración horizontal) indicaría la formulación inadecuada de los tiempos de la carrera.

- **Nota promedio**
  - A pesar de ser el indicador usado para la evaluación de los alumnos no refleja la realidad académica de los mismos ya que no considera la variable tiempo.

a- De la aplicación del análisis de sobrevida, basado en este indicador surge la estimación que el grupo de alumnos que aprobó el módulo en el primer examen terminaría su carrera en el tiempo previsto por la currícula, mientras que, para aquellos que lo aprobaron en la última de las recuperaciones este tiempo se alargaría aproximadamente al doble.

5. Conclusiones:

Si bien estos indicadores se originaron a partir de un estudio de una población estudiantil particular creemos que es válida su generalización. Son parámetros de sencillo cálculo y pueden originarse a partir de datos generalmente existentes en cualquier base de alumnos.

Consideramos que el fácil cálculo del promedio es lo que generalizó su uso pero del estudio realizado se desprende que tiene serias deficiencias en la valoración académica del alumno y que la variable proporción de materias aprobadas permite salvarlas .

Para un completo análisis del rendimiento académico del alumno se deberían usar de los tres indicadores y si hubiera que elegir uno de ellos consideramos que el más adecuado seria la **proporción de materias aprobadas.**

Referencias Bibliográficas:

- **Anderson, T. y Stanley, S**. *Introductory Statistical Analysis*
- **Mentz, G. y Santana, M.** (1995). *Calidad Universitaria: Un enfoque estadístico moderno.*
- **Perez, L.** (Publicación) *Políticas y definiciones de evaluación* - Algunos Métodos y Enfoques.
- **Santana, M. y Mentz, G.** (1995). *Evaluación de la Calidad Universitaria* - Un Enfoque en la Facultad de Medicina. Congreso de la Sociedad Argentina de Estadística.

GRUPOS DE TRABAJO Y DE DISCUSIÓN

Grupo de trabajo: Incorporación de la Tecnología en el aula y su impacto.

Angela Martín. Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD)
Delhy Porras. Universidad La Guardia College (LGCC)
Lidia Carbonell

Propósito : Intercambiar Ideas Sobre:

a) Tipo de Tecnología que se esta usando actualmente. Idealmente, los participantes en grupo harían una demostración de la tecnología usada en cada institución.
b) Marcos en los que se usa dicha tecnología.
c) Métodos de enseñanza apropiados para dicha tecnología.
d) Materiales desarrollados para acompañar dicha tecnología.
e) Reacción, estudiantil a la incorporación de la tecnología en el aula.
f) Reacción del profesorado a la incorporación de la tecnología en el aula.
g) Reacción administrativa a la incorporación a la tecnología en el aula.

La profesora Delhy Porras de La Guardia College mostró a los participantes los Sofwares educativos utilizados actualmente en LGCC, los cuales son: Derive, Pre-Calculo, Álgebra y Trigonometría y Maple. Los participantes no hicieron demostración de la tecnología usada en las instituciones que representan, pero, una profesora de México informo acerca de un Software elaborado por ella para sus estudiantes de Álgebra, otro de la UNAM, explico que utilizaba el Derive y un profesor de la Universidad de Morelia demostró Softwares educativos de Calculo elaborados por profesores de México, en Español.

Se repartieron los materiales desarrollados por LGCC, para acompañar las tecnologías Derive y Maple. El software Maple fue el que despertó mayor interés en los participantes.

La reacción estudiantil a la aplicación de estas Tecnologias para ayudar en el proceso enseñanza aprendizaje de los estudiantes de Calculo y Precalculo con el uso de los Softwares Derive, Álgebra y Trigonometría de Zill en la UASD fueron expuestos por las profesoras maestra Angela Martín y maestra Lidia Carbonell mediante investigación realizada con estudiantes de la UASD que usaron la tecnología y estudiantes de la UASD que no usaron la tecnología.

Los objetivos de la investigación fueron los siguientes:

a) Determinar como impacta en las actitudes de los estudiantes el uso de los recursos tecnológicos del computador en la enseñanza de la matemática.
b) Identificar el grado de motivación que crea el uso del computador como medio en el aprendizaje de la matemática.
c) Comparar los niveles de rendimiento cuando se usa como medio de enseñanza el computador y cuando no se usa.

d) Recomendar acciones que permitan un mejoramiento en las actitudes y aptitudes del estudiante haciendo uso del recurso de los Softwares educativos en el estudio de la matemática.

Metodología.

1) Se seleccionaron tres grupos de estudiantes de las asignaturas : Precálculo, Precálculo para estudiantes que cursaron un álgebra intermedia y Cálculo.
2) De los grupos escogidos se seleccionaron de manera aleatoria la mitad de cada grupo.
3) Para cada grupo la mitad elegida aleatoriamente trabajo con el Software, además de sus clases normales y la otra mitad solo tomo sus clases normales, se uso un mecanismo de control para que no hubiera fusiones de los dos grupos tomando clases con el Software.
4) Se fijo el tiempo que estuvo el estudiante en contacto con el Software en 8 horas semanales durante dos semanas.
5) Se hizo un registro de los estudiantes que participaron en el experimento, destacando los siguientes aspectos : a) Nombre, Dirección, Sexo, Edad y Teléfono. b) Procedencia: si son del interior o de la Capital y si son de la Zona urbana o rural. c) Incidencia de los profesores de matemática que estuvieron en los niveles primario y secundario en la formación de estos.
6) De las muestra seleccionadas nos aseguramos que los participantes no tenían computadoras en sus casas.
7) La evaluación final se realizó de manera conjunta entre los que usaron el Software y lo que no lo usaron, sobre los temas trabajados por todos.
8) Se hizo un registro de control de asistencias a los laboratorios.
9) Se hicieron anotaciones de la conducta observada en los estudiantes mientras desarrollaban sus labores frente al computador.
10) Se utilizaron profesores, ayudantes y monitores, trabajando dos estudiantes por computador, los cuales interactuaban entre si en las experiencias obtenidas.
11) Los estudiantes fueron dotados de los materiales necesarios como recursos normales para la resolución de los problemas.
12) Se utilizó un análisis estadístico o tabulación de datos que reflejo el rendimiento de cada grupo en los cuales se evaluaron los siguientes aspectos: Los que no usaron el Software, Los que lo usaron , el sexo, procedencia geográfica, situación económica y social, nivel de tecnología manejada por el alumno en la cotidianidad y otros.

Las estadísticas para el programa de Precálculo en los estudiantes que habían cursado un Álgebra intermedia, arrojaron los resultados siguientes:

Promedios de Rendimientos:

27.5	Estudiantes que no usaron la tecnología.
52.4	Estudiantes que usaron la tecnología.

Las estadísticas para los estudiantes de Precálculo sin Álgebra intermedia previa fueron:

Promedio de Rendimientos:

60	Estudiantes que usaron la tecnología.
65	Estudiantes que no usaron la tecnología.

Anexamos la tablas estadísticas con sus gráficas correspondientes.

De acuerdo a los resultados de la estadísticas en el uso del programa de Precálculo en ambos grupos se puede establecer lo siguiente:

a) El rendimiento en los estudiantes que usaron la tecnología (56.2) es mayor que el promedio de rendimiento en los que no la usaron (46.2).
b) El rendimiento de las hembras es superior al de los varones con una ligera diferencia.
c) Los estudiantes de la capital tuvieron mayor rendimiento que los del interior.
d) Los estudiantes con experiencia previa en el uso del computador tuvieron mayor rendimiento que los que no la tenían.
e) La diferencia en el rendimiento de los estudiantes de escuelas públicas respecto a las privadas no es significativa.
f) Los estudiantes de clase media alta tuvieron un mayor rendimiento que los de clase media baja.

Las estadísticas de los estudiantes de cálculo con el programa Derive fueron:

Promedio de Rendimientos:

47.5	Estudiantes que no usaron la tecnología.
72.5	Estudiantes que usaron la tecnología.

De acuerdo a los resultados de la tabla estadística anexa se puede establecer lo siguiente:

a) Los estudiantes que usaron la tecnología obtuvieron un rendimiento mayor que los que no la usaron.
b) Las hembras tuvieron un rendimiento mayor que los Varones.
c) Los estudiantes residentes en la capital obtuvieron mayor rendimiento que los residentes en el interior..
d) Los estudiantes que no tenían experiencia previa en el uso de la tecnología obtuvieron mayor rendimiento que los que la tenían.
e) Los estudiantes de las escuelas publicas y privadas obtuvieron el mismo rendimiento.
f) Los estudiantes de clase media baja obtuvieron mayor rendimiento que los de clase media alta.

Recomendaciones.

1- Se recomienda el uso de esta tecnología en el aula como uno de los recursos, debido a que despierta gran motivación en el estudiantes lo cual le ayuda a concentrarse mas en el estudio.

2- Se recomienda que para obtener mayor rendimiento en la aplicación, el profesor debe realizar un estudio, tomando en cuenta los aspectos que le permitan conocer el material humano para entonces aplicar una metodología que le de un mayor soporte al grupo que refleje deficiencia, sin que esto sea exhibido ante el grupo como técnica.

3- El trabajo del estudiantes en el computador debe ser asistido por un profesor, ayudante, asistente o un monitor para que el aprendizaje logrado este fundamentado en una metodología donde el razonamiento se ponga de manifiesto, ya que el estudiante acomoda la búsqueda de sus respuesta tratando de hacer el menor esfuerzo posible en aplicar la conceptualizacion matemática (teoría) a los caso particulares del problema.

4- Se recomienda la traducción de los Softwares al idioma español ya que existen limitaciones en el país con el idioma.

5- Esta experiencia de trabajo no es concluyente ya que es un trabajo sistemático que pretendemos desarrollar en los cursos siguientes y en los cuales involucraremos mas profesores para obtener su reacción al uso de esta tecnología.

6- Que se desarrolle un procedimiento de intercambio de experiencia entre los distintos países que participan en el desarrollo de la matemática educativa sobre el uso de tecnologías en el aula.

Sobre la formación del profesor de matemática para la enseñanza media

Ávalos Rogel, Alejandra. Escuela Normal Superior de México. correo: menbal@servidor.unam.mx
Escareño, José L. Universidad Autónoma de Zacatecas. correo: escareno@gauss.logicnet.com.mx
Fuentes Figueroa, Araceli
González Guajardo, Hernán. correo: hgonzalez@fermat.usach.cl
Lebrón Vázquez, Marilú. Universidad de Puerto Rico. Recinto de HumacaoStation.
Nole, Juan M.. Universidad de Panamá. Departamento de Matemática.
Roa Rodríguez, Andrea. México.
Scott, Patrick. Univ Estatal de Nvo. México. USA.
Suáres Bueno, Virginia. Edo. de México.
Trujillo Alegría, Rodolfo. Tuxtla Gutiérrez. Chiapas. México.

Documentos entregados:

1- "Documento base" (Prof. Hernán González). En 3 páginas se presentan cuatro desafíos principales que debe enfrentar el profesor de matemática actual: los provenientes de la sociedad actual, del desarrollo de la ciencia matemática, de la modernidad y del desarrollo de la ciencia de la educación. Finalmente se hace un breve alcance a los tres aspectos que deben revisarse en los procesos de formación de este profesional: su formación matemática y profesional, las características que debe ofrecer la institución formadora y el reconocimiento que la sociedad le entrega.

2- "Preparación del profesor de matemáticas: Consideraciones y desafíos" (Prof. Patrick Scott) En apretadas cuatro páginas se presenta una carta de informe elaborada por el Consejo de Educación en Ciencias Matemáticas y presentada a la NSF en marzo de 1996. Ella está constituida por un gran número de interrogantes agrupados en las siguientes preguntas desafiantes: ¿cuáles son las matemáticas que los futuros profesores deben de saber? ¿cómo es que los profesores llegan a saber matemáticas? ¿cómo es que los profesores aprenden acerca de la enseñanza de las matemáticas? ¿cómo es que podemos mejorar la capacidad de quienes educan a los profesores de matemáticas? y ¿cómo es que la preparación de profesores de matemáticas podría ser un proceso coherente?

Síntesis de la discusión:

Como el grupo no era muy numeroso, la discusión fue muy participativa y cada asistente tuvo la oportunidad de expresar su pensamiento en torno al tema. Lo siguiente es sólo un resumen de las consideraciones hechas.

En USA, los profesores que trabajan en instituciones formadoras de profesoresdeben estar involucrados en el rediseño de programas, guiar la práctica docente e incluso, ir a dar clases en las escuelas del sistema secundario y básico. Se pretende así acercarse al concepto de "profesor experto". También intervienen en la elaboración de textos y materiales y en la confección de los programas. Sin embargo, las principales decisiones emergen de las políticas educativas. Como el maestro decide dentro de su aula a partir de sus conocimientos y saberes, muchas veces sus decisiones entran en conflicto con las propuestas. También se mencionó que las perspectivas de los profesores universitarios que trabajan formando profesores son distintas a las de profesores de aula. De aquí la necesidad de acercarse este tipo de especialistas al trabajo real en el aula secundaria o primaria.

Desde hace un año en el politécnico de México se ha enfrentado el problema de la actualización de los profesores en servicio y claramente resulta muy distinto trabajar con los nuevos profesores que con los ya en servicio. Los nuevos profesores resultan más permeables, en cambio, muchos de los profesores en servicio son profesionales de carreras relacionadas con las matemáticas (ingenieros, actuarios, contadores, etc.) especialmente en el nivel medio superior (alumnos de 15 a 18 años), ya que para ese sector no se están formando profesores de matemáticas. Los cambios que se están produciendo en algunas áreas como medición no se reflejan de igual forma en otras direcciones, como la enseñanza de los números racionales por ejemplo. Son necesarios procesos de seguimiento. En general se enseña como nos enseñan y los profesores cuando vuelven a sus aulas tienden a privilegiar aspectos de mecanización. Falta desarrollar la capacidad de ver y oír lo que hacen los niños en el aula, considerada como un espacio de experimentación. El trabajo en grupo es una buena alternativa

En algunos Centros Universitarios de Puerto Rico, se ha logrado desarrollar estándares cercanos a los del NCTM. Los textos están escritos bajo un enfoque constructivista. Sin embargo falta la integración entre los profesores de matemáticas y los especialistas en educación. Buenos resultados en educación intermedia se han obtenido con los talleres para maestros en servicio.

En Panamá la formación en matemática para el nivel medio (6 años de secundaria) está a cargo de la universidad con el título de Licenciado en Matemática, carrera que ha tenido varias modificaciones en los últimos cinco años y que considera tres especialidades: matemática pura, matemática aplicada y matemática educativa. Pasados estos 4 años de licenciatura en la Licenciatura en Matemática Educativa, se pasa a una facultad de Educación por dos años para titularse como profesor de matemáticas de segunda enseñanza. También existen licenciados sin la especialización que se lles ha preparado aceleradamente por 2 o 3 años, con lo cual pueden dar clases de matemáticas sólo en primer ciclo, aunque muchos llegan a dar en el segundo. Incluso hay especialistas autorizados para dar clases en el nivel secundario. En Panamá la maestría (en Matemática Educativa, en Investigación de Operaciones y otras) está cerrada. Mientras funcionó, muchos egresados se quedaban como profesores universitarios y no como docentes de secundaria. El modelo: "la matemática se construye así se enseña tal cual" ha influenciado fuerte y negativamente los sistemas escolares.

En México lleva un año un departamento de Matemática Educativa en la Universidad y se ha implementado un curso donde se difunde material proveniente de la maestría y se realizan talleres con maestros de bachillerato.

Los asistentes se muestran muy motivados. El énfasis de estos talleres está en el CÓMO. Hasta ahora no se ha hecho una evaluación del impacto.

El profesor Scott manifiesta que es peligroso centrarse sólo en el como enseñar . Por ejemplo, una cuidadosa planificación no implica que los alumnos aprendan bien. En varios programas se enfatiza el como enseñar y no el cómo se aprende. El problema es: no formarlos en matemática, sino cómo a través de la matemática se les forma sin llegar a apabullarlos con conocimientos. Para esto es necesario que los estudiantes desarrollen estrategias de pensamiento, lo que debe ser responsabilidad de la escuela.

La reunión del grupo de discusión, de acuerdo a la planificación realizada por el comité organizador de RELME11, duró sólo una hora y el encargado asumió la responsabilidad de redactar los aspectos más relevantes y hacérselos llegar a cada uno de los integrantes para su corrección, revisión y aprobación. Una vez terminada esta fase, el documento final se hará llegar al comité organizador par a su eventual publicación en actas.

Conocimiento significativo de la matemática en los albores del siglo XXI

Mirta Teresa Torruella. Universidad Tecnológica Nacional. Argentina
Ana María Simoniello de Alvarez. Universidad Nacional del Litoral. Argentina
Eugenio Carlos Rodríguez. Facultad de Ingeniería Industrial. La Habana, Cuba.
José María Lozano Velazco. Centro de Estudios de Tecnología Avanzada. España.
Iván Castro Chadid. Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá, Colombia.

Reunido el grupo de profesores participantes se escuchó primeramente la propuesta de la Profesora Mirta Teresa Torruella, quien, a modo de elemento disparador manifestó: Uno de los temas más frecuentemente abordados en los últimos Congresos Internacionales, es la necesidad de que la Matemática proporcione al alumno un verdadero Conocimiento Significativo, motivando la acción y la reflexión de quien se acerca a ella. Es prioridad N° 1 que el alumnado tenga acceso a un conocimiento dinámico, que le sea útil para su desarrollo personal, que propicie su productividad e incentive su participación en la búsqueda de la Verdad. Es preciso pues, reconsiderar constantemente, las distintas propuestas didácticas que ofrecen los docentes de todo el mundo, tratando su adaptación y articulación permanentemente, en la conciencia de que el que aprende crece, Mental y espiritualmente, para desempañase cada vez más adecuadamente en la Realidad, interactuando siempre con ella.

Se imponen pues en los albores del Siglo XXI, nuevas perspectivas de enfoque a la enseñanza - aprendizaje, revalorizando el protagonismo del educando desde la primera etapa, quizás la más creativa e incentivadora y con frecuencia descuidada: la de la Exploración Previa de Temas.

Se hace necesario valorar esta instancia en su justa medida. Con una experta guía profesional, suele ser, además, por lo general, (sobretodo en Matemática), semillero de propuestas originales del alumnado de acuerdo a reales expectativas y necesidades individuales y/o colectivas, constituyendo un verdadero aprendizaje hacia el conocimiento significativo.

Iván Castro Chadid (Colombia): En los últimos años existe un enfoque más intuitivo del mecanismo del tratamiento del Cálculo, más ligado a las vivencias del estudiante, con lo que se estimula el interés por el tema y se facilita su aplicación, dotando de mayor significación a lo aprendido.

El enfoque intruccional del Cálculo depende no solamente del grado de formación básica en Matemática y su relación con otras asignaturas del currículo sino también de las características socio-culturales de la población que participa en el proceso de enseñanza - aprendizaje y de las vivencias de los estudiantes en la introducción al Cálculo. Tener en cuenta todo esto como conocer a fondo las características, del grupo humano al que se dirige el proceso son tareas prioritarias que deben abordar en el futuro quienes se comprometan en la enseñanza de la Matemática en Colombia. El desarrollo de las comunicaciones ha colocado al hombre a las puertas de uno de los acontecimientos de mayor trascendencia, porque afectará la forma como se encare la educación en cada país. El profesor tendrá que diseñar metodologías adecuadas a la enseñanza de Matemática, mediante el uso de tecnología. El estudiante no necesitará desplazarse de su hogar para recibir el mensaje de los profesores del mundo. Las perspectivas que ofrece la autopista de la información y estas nuevas metodologías harán mucho más responsable al alumno de su propio aprendizaje. Será más individual el proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática y bien guiadas por los docentes, los estudiantes se convertirán en entrenadores, socios y orientadores, para sacar mayor provecho de esa valiosa información que los llevará a adquirir el grado de madurez necesaria para poder generar procesos creativos e investigativos.

Eugenio Carlos Rodríguez (Cuba) - Con respecto a las experiencias que he estado asimilando en distintos congresos nacionales e internacionales, observo que aparecen con frecuencia aspectos comunes. Los cambios se producen: 1) en la Matemática en sí, 2) en las nuevas teorías psicopedagógicas, 3) en las nuevas tecnologías. Son aspectos que van muy unidos y obligan a pensar cómo enseñar la Matemática. Con respecto a 1) tradicionalmente se puso énfasis en la Matemática del continuo, pero en relación con las nuevas tecnologías obliga a poner énfasis en la Matemática Discreta (auge de las teorías del caos y fractales). En cuanto a 2) considero que lo mas importante en las tendencias modernas es el énfasis en el aprendizaje. Las nuevas teorías tratan no solo de cómo se enseña la Matemática, sino de como se aprende la Matemática, poniendo al estudiante en el papel protagónico. Se persigue el desarrollo de la capacidad de aprender del estudiante y el desarrollo del pensamiento lógico. El propósito es que el alumno "aprenda a aprender" enfrentándose a situaciones nuevas, y desde la enseñanza de las asignaturas de Matemática desarrolle esa capacidad, esa formación que le servirá en otras asignaturas de la carrera y luego como profesional.

Se ha discutido acerca de como utilizar la computadora en Matemática: si durante el período de desarrollo del estudiante o insistir que primero aprenda Matemática lo suficiente y luego se convierta en un apretador de teclas y use paquetes que le resuelvan cualquier operación. En el aula de Matemática pueden utilizarse paquetes muy útiles como Derive, Mathemática, Mat Sab y tantos otros. Con Derive, que es muy amigable, se pueden hacer cosas muy interesantes, como se ha visto en este Congreso, que permiten al alumno aprovecharlas para comprender mejor algunos conceptos matemáticos por ej.: límite, integral definida, etc., y después usarse como herramienta de trabajo en la práctica. Con esto se puede ahorrar tiempo en cálculos engorrosos y aprovecharlo para desarrollar la capacidad de razonar y la creatividad.

Ana María Simoniello de Alvarez manifiesta estar de acuerdo con lo expuesto por los profesores que le precedieron. También ha podido apreciar en diferentes Congresos y reuniones la inquietud por la forma como incorporar la herramienta informática en las tareas del aula, tan importante como aspecto de Educación Matemática.

En la Argentina se promueven cambios que contemplan el uso de tecnología en el aula, pero considero que serán posibles con docentes preparados, es decir que la capacitación, perfeccionamiento y/o actualización del docente son indispensables para que estos cambios no sean vacíos de contenido, pues influyen en todo currículo en todos sus aspectos y en las técnicas de aprendizaje.

En este Congreso se presentan diversas ponencias sobre el tema. En las Universidades se proponen Proyectos específicos de investigación y/o extensión para encarar las nuevas tendencias aunque hay hoy todavía impedimentos importantes: gran cantidad de alumnos en el aula, escasez de medios o recursos, dificultad en tiempos completos de dedicación docente. Entonces el docente tiene que capacitarse como puede y en su tiempo disponible.

Profesor asistente: reafirmo lo dicho por la Profesora Simoniello en cuanto a la falta de tiempo de los profesores para dedicarse al perfeccionamiento y con respecto a la autopista de la información que mencionó el Doctor Casto, hace parecer que la acción del docente pasa a segundo plano en la enseñanza aprendizaje. Con respecto a los programas informáticos, he visto algunos poco convenientes pues dan opciones y luego la respuesta.

Otro profesor (de Monterrey) tiene inquietudes por lo expresado por el Dr. E. Carlos Rodríguez y pregunta ¿en qué medida el uso de herramientas informáticas deja de lado el formalismo de la Matemática y la actuación del Profesor?

Carlos Rodríguez (Cuba): el curso de Cálculo más sencillo sería enseñar fórmulas y mostrar como las calcula la computadora, pero así, el alumno no sabría nada de Matemática. El docente debe ser capaz de mostrar que el concepto es más importante que la computadora. Toda tarea con la computadora debe ser acompañada con la conceptualización formal correspondiente.

Ana María Simoniello: el rol del docente es el que entra en juego para establecer verdaderas instancias educativas, que contemplen todos los aspectos necesarios para el aprendizaje.

Mirta Teresa Torruella: en la vida real, no aparecen problemas que tengan un directo "significado matemático", si no se los ve con esos ojos. El alumno, con la ayuda del profesor, es quien debe haber desarrollado juicio crítico para traducir el problema real, "matematizarlo" y luego resolverlo. En esta instancia podrá usar la computadora para hacer los cálculos. Pero el rol del docente como formador y como guía es fundamental. Ha cambiado la definición de espacio y tiempo áulicos como lugar y período en que un grupo de alumnos permanece más o menos estático y receptivo, oyente de una realidad indiscutible que le es presentada y desconectada del marco exterior ya, el alumno está alerta y atento permanentemente a la información que pueda llegarle, con una apertura de conciencia y captación atemporales, pues sabe que a veces la idea que completa el cuadro o marca una nueva dirección en la investigación puede surgir en el momento más imprevisto y no precisamente cuando nos forzamos a hallarla en las horas de clase o estudio. En esta apertura mental se nota la influencia del docente que lo ha guiado. El vertiginoso avance tecnológico, marca nuevos rumbos y favorece el acercamiento de datos de todo tipo, casi al instante o en muy poco tiempo y una apertura al exterior, que trasciende los límites de la Universidad, región, país o continente.

Una profesora asistente comenta que en el Instituto Tecnológico donde ella trabaja tiene grandes dificultades de conexión, por diversos factores, entre los docentes de Matemáticas y los del Gabinete de Computación y muchas veces los profesores de Matemática, aunque tienen disponible algún paquete apropiado al dictado de sus clases, no lo aprovechan.

Iván Castro Chadid: señala como ideal la posibilidad de que cada profesor construya su propio software, acorde a las clases que desea impartir.

Eugenio Carlos Rodríguez (Cuba): en mi país tenemos aprobado un proyecto de investigación a largo plazo para modificar los planes de estudio de Matemática para Ingeniería y se propone desarrollar software para cada asignatura y para cada tema.

Mirta Teresa Torruella: En esta nueva sociedad mundial, que ha creado el avance de la Ciencia y la Tecnología, se impone una agilidad y flexibilidad renovadas para aceptar los cambios y comenzar a vislumbrar a los docentes del siglo XXI como idóneos guías de la evolución y el autoaprendizaje de cada uno de sus alumnos.

Un método para diseñar la currícula escolar de matemáticas

Santiago Ramiro Velázquez. Agustín Dorantes Lucena. Guillermo Cambrón Huicochea.
Facultad de Matemáticas. F. Arredondo Num. 27
San Marcos, Gro.

Resumen:

Este trabajo forma parte de una investigación sobre la enseñanza de los dominios numéricos en la escuela secundaria mexicana.

Aquí se presenta un método para seleccionar y estructurar contenidos de la Matemática escolar, que considera una concepción de objetivos y principios para organizar los contenidos, particularmente en el tema de los dominios numéricos: N, Q+, Q, R.

Introducción:

Uno de los aspectos importantes de la matemática educativa, es la selección y estructuración de los contenidos que ofrezcan mayores potencialidades para el logro de los objetivos de la enseñanza de esta asignatura y este aspecto constituye una línea actual de investigación en didáctica de la Matemática. Toda vez que los profesores de esta disciplina que dominan este aspecto están en condiciones de comprender e instrumentar una currícula en la escuela.

El autor considera que un diseño curricular debe abarcar principalmente, una concepción de objetivos que refleje las funciones de la enseñanza de determinados contenidos matemáticos y un sistema de principios para organizar estos últimos.

Esta investigación se analizó en un grupo de trabajo de las actividades de la Undécima Reunión de Matemática Educativa (Relme 11), cuyos objetivos fueron los siguientes:

Contribuir al desarrollo de la línea de investigación en Didáctica de la Matemática, denominada: diseño curricular.

Analizar este método para el diseño de una currícula escolar de Matemática, que considera una concepción de objetivos y principios para organizar los contenidos.

Instrumentrar este método en el estudio de un determinada currícula escolar de Matemática o para concebir objetivos y contenidos de un curso o nivel determinado.

Para el logro de estos objetivos se realizaron las siguientes actividades:

Análisis de los aspectos esenciales del método.

- Fundamentos teóricos.
- Concepción de objetivos.
- Principios para organizar los contenidos.
- Experiencia pedagógica realizada.

Instrumentación del método en el estudio de algún diseño curricular de matemática o de los aspectos esenciales para hacer una propuesta.

- Programa de Matemáticas de Educación Secundaria.
- Programa de Matemáticas III de las Escuelas Preparatorias de la Universidad Autónoma de Guerrero.

Planteamiento del problema:

En el sistema educativo mexicano se tienen algunas deficiencias en esta dirección, ya sea porque no se tiene precisión de la currícula de un nivel determinado o porque se desconoce un método para formular objetivos y seleccionar y estructurar contenidos matemáticos. Un método útil para los docentes en la comprensión e instrumentación de la currícula establecida o para concebir los objetivos y estructurar los contenidos para una determinada cúrricula.

Estas deficiencias traen como consecuencia una desorientación del alumno y del profesor al no tener precisos los objetivos que se pretende lograr y el papel que les corresponde en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Algunos fundamentos teóricos:

En este método se concibe la enseñanza de la Matemática en la Escuela Secundaria, de modo que se de prioridad al desarrollo de la personalidad del alumno. En este sentido (Fariñas, G. 1995) hace novedosos aportes al explicar que la escuela tiene como función principal contribuir al desarrollo de las habilidades conformadoras del desarrollo de la personalidad (HCDP). Estas habilidades consisten en la persistencia del estudiante en el logro de metas personales y en las acciones de comprender, comunicar y plantear y resolver problemas.

Por su parte (Mitjans, A. 1995) explica que en la escuela es esencial la implicación personal del alumno en su proceso de aprendizaje y coincide con las ideas de Fariñas al expresar la relevancia del planteamientos de problemas y su solución creativa.

Como se puede ver, estas tesis se refieren a una de las funciones generales de la escuela, a cuyo cumplimiento contribuirían las asignaturas del plan de estudios. Principalmente, la Matemática, por su carácter integrador y generalizador y sus potencialidades para desarrollar la habilidad de solución de problemas, en la que están inmersas las acciones de comprender, comunicar, modelar, plantear y resolver.

Estas consideraciones se amplían con los criterios de (Selden, J. Mason, A. y Selden, A.1994) al expresar que en la enseñanza de la Matemática prevalecen los ejercicios rutinarios que en poco o nada contribuyen al desarrollo intelectual. Por lo que es necesario introducir "verdaderos problemas" que reflejen la naturaleza de la Matemática.

En base a estas ideas, es necesario que al diseñar una currícula escolar de Matemática, se considere la naturaleza de esta asignatura y sus potencialidades para el desarrollo de la personalidad del estudiante.

Lineamientos básicos para la formulación de objetivos:

- Son componente principal y categoría rectora del proceso docente-educativo que aportan elementos para su organización, orientación y control.
- Concretar los propósitos y aspiraciones de la sociedad y del alumno que durante el proceso docente-educativo se van cristalizando en las formas de pensar y de actuar de los escolares.
- Son una concepción anticipada de lo que se espera durante el proceso de enseñanza y precisan las características del hombre en vía de formación . Estas características deben responder a un desarrollo integral y multifacético que impulsen el desenvolvimiento cognoscitivo independiente, el desarrollo de las formas lógicas del pensamiento, la formación de una concepción científica del mundo y los más altos valores y convicciones sociales.
- Integrar adecuadamente los objetivos de la asignatura, del tema y de la clase a fin de que haya una sistematicidad.
- Ser comprensibles para los profesores a quienes están dirigidos y conformar un material de apoyo en la realización del proceso de enseñanza que demandan los tiempos modernos.
- Que los alumnos participen en la conformación de los objetivos, expresando lo que esperan de la clase o sistemas de clases, en vez de ser impuestos o expresados en forma acabada.
- Formularse en términos de acciones a realizar por los alumnos, expresar las condiciones de ejecución y los índices de calidad de dichas acciones.

Es necesario que las acciones expresadas en los objetivos sean abarcadoras e integradoras de los aspectos esenciales del objeto de estudio, para asegurar un desempeño eficaz de los alumnos en su vida laboral y social. Como afirma (Fariñas, G, 1995) "hay que lograr en nuestros alumnos la armonía del pensamiento y la actuación, buscando la unidad de la diversidad de las cosas que enseñamos", o como dice (Nuñez, R, 1995) "Existe un carácter sintético y a la vez abarcador de los objetivos finales del plan de estudios, a través de los que se define el modelo o perfil de la personalidad que se quiere formar, expresado mediante las tareas fundamentales que componen su actividad".

Principios de organización del contenido:

Líneas directrices de la enseñanza de la Matemática y Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.

Dos de las diferentes tendencias que actualmente existen para estructurar la asignatura Matemática son: las Líneas directrices de la enseñanza de la Matemática y los Estándares curriculares y de evaluación para la educación Matemática.

Estas dos tendencias son las que se consideran en esta propuesta pues son las más cercanas al contexto mexicano y se ajustan a las concepciones actuales de la enseñanza de la Matemática y aunque no se concibieron con iguales objetivos, se complementan no resultando ser contradictorias.

Las Líneas directrices de la enseñanza de la Matemática (MINED, Cuba, 1987) son lineamientos que orientan un curso o un sistema de enseñanza que presentan los contenidos que ofrecen mayores potencialidades para el logro de objetivos planteados. Fueron concebidas para una programación homogénea del proceso de enseñanza con programas, libros de texto y orientaciones metodológicas únicas pues es la forma en que en Cuba está planificada la enseñanza.

Estas líneas están definidas por una parte, de acuerdo a los contenidos matemáticos específicos y por la otra, de acuerdo con el desarrollo de capacidades mentales específicas y generales mostrando el camino que deben seguir los contenidos a lo largo de los 12 grados que integran el sistema de educación general, politécnica y laboral. El tema que se investiga se enmarca en las líneas directrices Dominios Numéricos y Cálculos con magnitudes y valores aproximados y tiene relación con las demás líneas directrices de la enseñanza de la Matemática.

A diferencia de las directrices, los Estándares curriculares y de evaluación de los Estados Unidos (NCTM, USA, 1991) son concebidos con el propósito de establecer determinados requisitos que sobre la base de una heterogeneidad de programas, textos y materiales para el profesor se logre cierta uniformidad para la educación matemática en los 12 grados de la escuela obligatoria en ese país y con ello elevar la calidad a partir del establecimiento de ciertos índices o estándares de calidad.

Esto significa que no se ha concretado en un programa único sino en múltiples programas y planes de estudio. "Un estándar es una afirmación-declaración que puede ser utilizada para juzgar la calidad de un currículo matemático o de métodos de evaluación" /NCTM, 4, 2 /

Al igual que las directrices los estándares curriculares determinan qué contenidos ofrecen mayores potencialidades para la educación matemática de los alumnos y orientan la determinación de objetivos. En los estándares además se dan algunas actividades que docentes y alumnos deben realizar para lograr los objetivos declarados.

El tema de esta investigación considera los estándares: números y relaciones entre números, sistemas numéricos y teoría de números, cálculos y estimación todos ellos presentes en las directrices de contenido concebidas en esta propuesta. Además se relaciona con los 4 estándares generales para los 12 grados de la escuela obligatoria norteamericana, estos son: la Matemática como resolución de problemas, la Matemática como comunicación, la Matemática como razonamiento y conexiones matemáticas.

De estos 4 estándares generales, en la propuesta se considera en especial el papel de los problemas en la enseñanza de la Matemática, la conexión de la Matemática con otras materias y con el mundo fuera de la escuela, las aplicaciones de la Matemática, la modelación de situaciones usando diferentes métodos, el uso de las notaciones matemáticas y su papel en el desarrollo de las ideas matemáticas.

Como se puede apreciar, estos puntos de vista no están en contradicción con lo que se expresa en las directrices para el desarrollo de capacidades mentales específicas y generales en la enseñanza de la Matemática y en cierto modo se complementan.

Las directrices y los estándares fueron concebidos en condiciones de aplicación diferentes, no obstante establecen aspectos esenciales del contenido matemático y en particular de los dominios numéricos aplicables en las condiciones de la escuela mexicana, que en este nivel de enseñanza es homogénea en su concepción pero heterogénea en su realización ya que aunque los programas sean únicos, los libros de texto, las orientaciones didácticas y la formación de profesores son diversas.

Principios para seleccionar y estructurar los contenidos.

Los contenidos referentes a los dominios numéricos: naturales, fraccionarios, enteros y racionales se encuentran en el programa de Matemática para la escuela secundaria mexicana, faltando la selección del contenido de los números reales y la estructuración de todos ellos de acuerdo con las posiciones teóricas que se sustentan en este trabajo. Para esta selección y estructuración se aplica el sistema de principios que propone (Flores, A, 1991) por estar de acuerdo con las funciones y objetivos de la enseñanza de los dominios numéricos que se presentan en esta investigación.

Dicho sistema se integra con los siguientes principios: de cientificidad, desarrollador, de generalización, de sistematicidad y de relación intermaterias.

En base a estos lineamientos se seleccionan y estructuran los contenidos referentes a los dominios numéricos, en correspondencia con los objetivos propuestos.

Como se puede ver, este método considera aspectos generales y específicos que pueden servir de material de apoyo a las personas interesadas en trabajos de esta línea. Si bien aquí se aplica a los

dominios numéricos en la escuela secundaria mexicana, por su grado de generalidad puede ser aplicado en otros contenidos de matemática escolar.

De acuerdo a una experiencia pedagógica realizada en dos escuelas secundarias del estado de Guerrero, se puede afirmar que esta forma de concebir los objetivos y contenidos es aplicable en las condiciones de la escuela secundaria mexicana. En dicha experiencia se refleja el interés con que participan los alumnos en las diversas tareas planteadas. El educando hace suyos los objetivos en alguna medida y se esfuerza por lograrlos, manifiesta estar de acuerdo con esta forma de trabajar y exige una educación que se salga del formalismo con que muchas veces se ha impuesto.

Los criterios de los participantes en el grupo de trabajo señalan:

El método es interesante y aplicable en la Escuela Secundaria Mexicana.

La experiencia es limitada y por ende los resultados son incipientes, por lo que es necesario ampliar la investigación de campo.

Referencias Bibliográficas:

- **CONALTE**, (1991). *Perfiles de desempeño para prescolar, primaria y secundaria*, SEP, México.
- **Consejo Nacional de Profesores de Matemática**, (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación Matemática*, edición en castellano Sociedad Andaluza de educación matemática, Sevilla.
- **Fariñas, G**. (1995). *Maestro una estrategia para la enseñanza*, Academia, Habana.
- **Florez, A.** (1991). *Una propuesta de estructuración de un curso de Geometría del espacio para el nivel medio superior en Cuba*, ISP "Enrique José Varona", Habana.
- **Guzmán, M.** (1991). *Tendencias inovadoras en Educación Matemática*, Labor, Madrid.
- **Hernández, H.** (1989). El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la educación superior cubana, experiencia en el Algebra Lineal, *tesis de doctorado*, Centro de estudios para la educación superior, Habana.
- **Howson, G.** (1991). *Currícula nacional de Matemáticas*, Universidad de Southampton, London. (en inglés).
- **Mitjans, A.** (1995). *Creatividad, personalidad y educación*, Pueblo y Educación, Habana.
- **Mined,** (1987). *Concepción general de la asignatura Matemática en el subsistema de educación general politécnica y laboral*, Habana, impresión ligera.
- **Núñez, R.** (1995). Contribución a la formación del pensamiento matemático, *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, Habana.
- **IBERCIMA,** (1992). *Organización de estados americanos para la educación y la cultura*, Mare Mostrum ediciones, Madrid.
- **Rizo, C. y Campistrous, L.** (1993). *Enseñanza de la Matemática reflexiones polémicas, impresión ligera*, Habana.
- **Seldon, J.; Mason, A. y Seldon, A.** (1994). ¿Pueden los estudiantes promedio resolver problemas de cálculo no rutinarios?, *Antología en Educación Matemática*, CINVESTAV-IPN, México.

Grupo Editorial Iberoamérica a la vanguardia en publicación de obras de matemática educativa.

Algunas de nuestras obras:

Aprendiendo álgebra con hojas electrónicas de cálculo / *Teresa Rojano, Sonia Ursini*

Enseñando álgebra con hojas electrónicas de cálculo / *Teresa Rojano, Sonia Ursini*

Historia e historias de las matemáticas / *Mariano Perero*

Ingeniería didáctica en educación matemática / *Michele Artigue*

Ingeniería didáctica: un estudio de la variación y el cambio / *Rosa Ma. Farfán*

Principios y métodos de resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas / *Luz Manuel Santos Trigo*

Estudios en didáctica / *Guillermina Waldegg*

Geometría analítica / *Fernando Hitt, Eugenio Filloy*

Serie Cuadernos Didácticos

Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades 2/ed / *Rosa Ma. Farfán, Armando Albert*

Aproximaciones sucesivas y sucesiones / *Ricardo Cantoral, Evelia Reséndiz*

Calculadoras: Introducción al álgebra / *Tenoch Cedillo*

Geometría analítica / *Ismael Arcos*

S.A. de C.V.
Grupo Editorial Iberoamérica
Nebraska 199 Col. Nápoles C.P. 03810, México, D.F. Tel: 523 0994 Fax: 543 1173